MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Un guide fondé sur l'état de la recherche

Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP

Cet ouvrage a été coordonné par le service de l'instruction publique et de l'action pédagogique et le service de l'accompagnement des politiques éducatives de la direction générale de l'enseignement scolaire du ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports.

Ce document a fait l'objet d'une relecture critique de plusieurs membres du Conseil scientifique de l'éducation nationale.

Sommaire

Avant-propos

Les mathématiques sont omniprésentes dans la vie quotidienne. Il y a mille manières de les faire découvrir aux enfants, dès la maternelle. Les mathématiques sont aussi l'art de relier entre eux différents champs qui les composent et ainsi de faire découvrir des liens entre nombres, espace, symétries, opérations, etc. Elles permettent de développer des capacités et compétences utiles pour l'éducation des enfants : savoir représenter, modéliser, chercher, raisonner, calculer et communiquer.

Le présent guide se centre sur un domaine fondamental des mathématiques : l'enseignement des nombres, du calcul et de la résolution de problèmes arithmétiques au CP. Il a été élaboré autour de l'idée que l'enseignement du nombre au CP résulte d'un équilibre fécond entre construction de connaissances et d'automatismes sur les nombres, sens des opérations et maîtrise des techniques opératoires. Bien évidemment, d'autres domaines des mathématiques sont fondamentaux comme la géométrie, les grandeurs et les mesures mais ne font pas l'objet d'études dans ce guide, ce qui n'indique aucunement une hiérarchie.

Ce guide complète les ressources institutionnelles déjà à disposition des professeurs, à savoir le programme de mathématiques, les attendus de fin de CP, les repères annuels de progression du cycle 2 et les documents ressources pour le cycle 2. Il insiste plus précisément sur les éléments qui suivent.

Importance du lien entre sens et technique

La construction du sens des opérations et, notamment, la capacité à reconnaître les opérations en jeu dans un problème sont liées aux capacités de l'élève à mobiliser les nombres, à les désigner, à prendre en compte leurs propriétés mais aussi à mettre en œuvre des techniques de traitement et de calcul.

Importance de la distinction de deux systèmes de numération

Il existe deux systèmes de numération, deux manières de désigner les nombres : d'une part les noms des nombres à l'oral qui se trouvent dans la comptine numérique en français (la numération orale, par exemple, « vingt-trois »), et d'autre part les désignations écrites chiffrées des nombres (la numération écrite chiffrée, par exemple, « 23 »). Ce sont deux systèmes distincts de représentation des nombres qu'il convient de mettre en relation.

Importance du travail des différents modes de calcul

Les différents modes de calcul (calcul mental, calcul en ligne, calcul posé) se construisent en étroite relation. Si l'enseignement de ces différents modes doit respecter dans un premier temps une chronologie faisant intervenir davantage du calcul mental ou du calcul en ligne, il n'y a pas de hiérarchie entre les différents modes de calcul. Ces différents modes contribuent à donner à l'élève du pouvoir sur les nombres, à les explorer, à les appréhender selon des points de vue différents et à réutiliser ces connaissances pour résoudre des problèmes.

Importance du rôle de la manipulation et de la verbalisation des élèves dans les apprentissages

L'ensemble du domaine numérique permet d'accompagner chaque élève, depuis la manipulation d'objets jusqu'à l'abstraction. Ce parcours, en en identifiant des grandes étapes, notamment la verbalisation, permet d'harmoniser et de structurer l'enseignement.

Les premiers travaux des élèves sur les nombres et la résolution de problèmes s'appuient systématiquement sur la manipulation, tant pour représenter les situations, les modéliser que pour déterminer ou contrôler les réponses. Progressivement les élèves pourront se passer de cette manipulation au profit de dessins puis de schémas de plus en plus abstraits.

Les travaux sur les nombres et la résolution de problèmes doivent s'accompagner d'une verbalisation par les élèves. La verbalisation des actions lors de la manipulation et de la modélisation dans la résolution du problème favorisera l'accès à l'abstraction. Elle permet à l'enseignant de mieux comprendre ce que fait et pense l'élève pour pouvoir apporter les éventuelles aides appropriées.

Importance des cheminements cognitifs pour passer de la manipulation à l'abstraction

Pour passer progressivement de la manipulation à l'abstraction, plusieurs cheminements cognitifs peuvent être identifiés. Ils sont initialisés par quelques procédures bien définies dont certaines sont privilégiées par les élèves. Afin de leur permettre de progresser tout en prenant en compte la diversité de leurs procédures et de leurs connaissances, le professeur veillera à ménager des cheminements cognitifs adaptés.

Importance de la modélisation dans la résolution de problèmes

La résolution de problèmes est au cœur de l'activité mathématique et mobilise un ensemble complexe de savoirs et de compétences. Il est nécessaire d'enseigner des stratégies (efficaces) de résolution de problèmes, notamment dans le domaine arithmétique, qui se fondent sur des schémas aidant les élèves à appréhender la situation, à penser et à construire la modélisation, en vue de résoudre les problèmes posés. Ces stratégies aboutissent *in fine* à l'écriture symbolique mathématique des opérations en jeu.

Importance d'un texte du savoir

Il est important de développer, lors de phases d'explicitation, de synthèse et d'institutionnalisation, un texte du savoir pour tous (sous forme orale d'abord, faisant intervenir des représentations imagées, et dès que possible sous forme écrite). Ce texte explicite ce qui a été appris et ce qu'il faut retenir en vue d'un réinvestissement dans d'autres situations.

Plan du guide

Le guide s'appuie à la fois sur des analyses mathématiques, épistémologiques et didactiques, mais aussi sur les résultats de la recherche sur l'enseignement des mathématiques et dans le domaine de la psychologie. Chaque chapitre du guide propose des exemples de séances et de pratiques enseignantes.

L'introduction, à partir d'un exemple de résolution de problèmes, montre comment les connaissances mathématiques construites au CP peuvent et doivent être mises en réseau afin d'amener progressivement les élèves à mobiliser les connaissances et les procédures attendues au CP.

Le chapitre 1 présente une analyse synthétique des deux systèmes de numération et développe des pistes pour leur enseignement.

Le chapitre 2 présente les différents modes de calcul (calcul mental, calcul en ligne, calcul posé) et propose des pistes pour les enseigner.

Le chapitre 3 est consacré à la résolution de problèmes arithmétiques. Il présente différents types de problèmes arithmétiques et décrit leur enseignement au CP. Il met en évidence l'importance de la manipulation et de l'utilisation de schémas pour la modélisation. Il place l'enseignement de la résolution de problèmes en CP dans un continuum du cycle 1 au cycle 3.

Le chapitre 4 présente une synthèse du matériel pouvant être utilisé en classe de CP. Une liste du matériel pouvant être mis à disposition des élèves en classe est proposée.

Le chapitre 5 porte sur la place du jeu dans l'apprentissage des nombres et des opérations et propose une grille de critères pour analyser et mettre en œuvre des jeux mathématiques dans les classes.

Le chapitre 6 propose des outils pour aider les professeurs à choisir, de manière la plus éclairée possible, un manuel sur lequel appuyer leur enseignement.

Le chapitre 7 propose une programmation sur l'année de CP de l'enseignement progressif de la numération, des modes de calcul et de la résolution de problèmes.

Le guide se termine par une bibliographie.

Mobiliser et construire des connaissances dans l'activité de résolution de problèmes au CP

Dans cette introduction, à partir d'un exemple de résolution de problèmes, nous apportons des éléments de réponses aux questions suivantes :

— comment permettre aux élèves de se construire des représentations du problème en s'appuyant sur des manipulations, mais également comment dépasser ces dernières pour aller vers davantage d'abstraction en s'appuyant sur la verbalisation ?

— comment faire évoluer les connaissances et procédures mobilisées en fonction de la progression générale mise en œuvre par le professeur et particulièrement des cheminements cognitifs qu'il ménage pour les élèves ?

— quelle place donner à l'institutionnalisation, notamment comment développer des traces écrites du travail effectué ?

Un problème additif et des exemples de réponses d'élèves

L'énoncé du problème est le suivant : « *Pierre et Paul ont ensemble 21 images, Pierre a 3 images. Combien Paul a-t-il d'images ?* »

Il s'agit de résoudre un problème à une étape relevant des structures additives (du champ additif), du type parties-tout et plus précisément de rechercher le nombre d'éléments d'une partie en connaissant le nombre d'éléments de l'autre partie et du tout.

Les élèves ont déjà rencontré ce type de problème (avec des nombres plus petits). Le plus souvent, ils les ont résolus en mettant en œuvre des procédures personnelles qui ont été comparées notamment avec des procédures plus efficaces. Toutefois, la pertinence de ces dernières n'a pas été perçue par tous.

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ÉLÈVES

À partir de productions d'élèves repérées dans des classes de CP, nous analysons des procédures dont il est peu probable qu'elles soient toutes observables dans la même classe de CP. Toutefois, elles peuvent apparaître ; la tâche du professeur est alors de les repérer dans l'action, de les analyser et de prévoir la manière de les prendre en compte et de les traiter. Le but est de créer les conditions nécessaires à l'appropriation progressive par tous les élèves des procédures de résolution les plus efficaces et les plus adaptées, et de faire évoluer les procédures personnelles de chacun.

Ces procédures se regroupent par famille relevant de raisonnements assez proches ou pouvant présenter des filiations utiles à connaître. La prise en compte de la qualité des connaissances mobilisées, des représentations, supports et registres convoqués nous amène à distinguer les trois grandes stratégies suivantes :

Stratégie 1. Les stratégies de dénombrement plutôt élémentaires : comptage, surcomptage ou décomptage, de un en un ou par sauts, etc. ;

Stratégie 2. Les stratégies de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections : représentations diverses, par exemple figuratives ou schématiques ;

Stratégie 3. Les stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées et formalisées : frise numérique, schémas conventionnels, écritures mathématiques formelles (c – a = b) ou plus transitoires (a + ? = c ou $a \xrightarrow{?} c$).

Stratégie 1 : dénombrement plutôt élémentaire

Les procédures suivantes (élèves A, B et C) relèvent de cette catégorie.

Élève A : après avoir lu le problème, l'élève prend des jetons. Il compte d'abord 3 jetons, les dispose puis complète la collection de jetons jusqu'à 21 avec un peu de difficulté. Il recompte plusieurs fois les jetons disposés en revenant en arrière puis il dit : « *Paul a ces jetons-là* ». Le professeur répète la question du problème. L'élève compte les jetons et répond 18, il demande à vérifier son résultat en recomptant à nouveau et dit : « *c'est ça… dix-huit… non, dix-huit images* ».

Élève B : l'élève dessine une collection de 21 rectangles plus ou moins organisée (traces de constellations) en les comptant mentalement un à un. Il en raye 3, puis il compte un à un les rectangles restants et énonce le résultat : « *dix-huit* ».

Élève C : l'élève dessine d'abord 3 croix en énonçant en même temps les nombres de 1 à 3, marque un temps d'arrêt et complète ensuite la collection jusqu'à 21 (en laissant un espace entre les deux collections) en surcomptant de 4 à 21. Il compte alors les objets de la deuxième collection un à un et énonce le résultat : « *dix-huit* ».

Ces procédures se caractérisent par la **constitution effective des collections** intervenant dans le problème si l'élève dispose du matériel nécessaire (images, jetons, etc.) ou s'il produit leur représentation à l'aide de dessins plus ou moins figuratifs (rectangles, croix, etc.) au statut intermédiaire entre le schéma épuré et le dessin strictement figuratif. L'élève lit la réponse sur la collection reconstituée ou représentée. Il n'y a pas d'anticipation du résultat mais seulement un constat résultant de la traduction des données représentées à l'aide d'un comptage ou d'un surcomptage plus ou moins rapide. Donner la réponse revient alors à énoncer ce constat.

Afin d'identifier et de repérer ces procédures, le professeur prendra en compte le type de dénombrement (un par un, paquets par paquets), la qualité de la représentation (figurative ou davantage schématique), la présence de nombres écrits, l'organisation des collections qui peut faciliter ou non le comptage des collections.

Stratégie 2 : dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques ou des abstractions

L'élève optimise, au moins en partie, le dénombrement des quantités en surcomptant ou décomptant, en mobilisant des représentations symboliques. Ces représentations ne relèvent pas de la simple description de la situation. Représentant une partie seulement des quantités, elles traduisent une organisation des collections qui révèle une montée en abstraction, voire un pas vers le calcul. En revanche, l'élève lit et constate le résultat sur la représentation en attribuant le nombre inconnu à la bonne collection. Il s'agit encore de stratégies de dénombrement qui évitent le calcul et pour lesquelles la lecture du résultat provient du constat de l'organisation élaborée de la ou des collections.

Les procédures suivantes (élèves D, E et F) relèvent de cette catégorie.

Élève D : l'élève décompte oralement : « *vingt, dix-neuf, dix-huit* », il lève un doigt en même temps qu'il énonce chacun des nombres et s'interrompt après avoir levé trois doigts, symbolisant le nombre d'images de Pierre ; il contrôle en regardant sa main et énonce le résultat en répétant le dernier mot-nombre énoncé : « *dix-huit* ». Dans une certaine mesure, l'élève a pris conscience qu'il doit « retirer » 3 à 21 par un décomptage s'appuyant sur une collection intermédiaire (ses doigts).

Élève E : après avoir dit à haute voix : « *vingt et un* », l'élève écrit sur sa feuille : « *20, 19, 18* » ; il s'interrompt après avoir écrit ces trois nombres et énonce le résultat : « *dix-huit* »[1]. Cette procédure révèle une prise de conscience semblable à celle de l'élève D. Comme le décomptage ne porte que sur trois nombres, l'élève n'a sans doute pas besoin de compter les nombres ainsi écrits. S'il s'agissait de retirer un nombre plus grand (par exemple 8, 9 ou plus), l'élève devrait sans doute accompagner le décomptage, du comptage des nombres écrits.

1 — Pour aider l'élève à comprendre qu'il ne faut pas écrire le « 21 », le professeur pourra s'appuyer sur du matériel.

Élève F : l'élève énonce le nombre 3, puis il surcompte jusqu'à 21 en écrivant au fur et à mesure les nombres : « *4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21* » ; il n'aligne pas ces nombres mais les écrit plutôt dans le désordre sur sa feuille. Il compte ensuite un à un (avec un peu de difficulté pour parcourir ce qu'il a écrit) le total de nombres ainsi écrits et note le résultat : « *18* ». Là encore, cette procédure révèle une prise de conscience proche du calcul ; il cherche à déterminer par un surcomptage comment « aller de 3 à 21 ». Cela revient à « ajouter » 18 à 3 en s'appuyant sur la collection des écritures des nombres.

Notons que cette prise de conscience est une caractéristique commune à ces trois procédures qui peut laisser penser que l'élève, en mobilisant conjointement une organisation de la collection (liée au support) et une procédure de dénombrement, se rapproche d'une procédure de calcul.

Stratégie 3 : stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées et formalisées

Les deux productions suivantes (élèves G et H) relèvent de cette catégorie.

Élève G : il énonce sur le mode interrogatif : « *trois pour aller à vingt et un* » ; il réfléchit un moment puis écrit successivement :

$$3 \xrightarrow[7]{} 10 \qquad 10 \xrightarrow[11]{} 21$$

$$7 + 11 = 18$$

Figure 1. Production de l'élève G.

Il énonce le résultat : « *Paul a dix-huit images* ».

Élève H : l'élève dit : « *Je dois calculer vingt et un moins trois* » et écrit : « *21 – 3 =* ». Il commente : « *Je ne sais pas calculer directement… je fais vingt et un moins un, vingt* » et il écrit : « *21 – 1 = 20* », puis il énonce et écrit de la même façon « *20 – 2 = 18… comme ça j'ai enlevé trois.* ». Et il complète l'écriture soustractive : « *21 – 3 = 18* ».

Cette catégorie renvoie aux procédures qui traduisent la situation, explicitement ou non, par une écriture mathématique (3 + ? = 21 ou ? + 3 = 21 ou 21 – 3 = ?) et induisent un calcul ou non (dans ce dernier cas, l'élève peut alors éventuellement recourir à un dénombrement pour trouver la réponse). Les procédures de ce type mobilisent alors des registres faisant appel à des outils et connaissances mathématiques plus élaborés qui vont se décliner notamment selon les paramètres explicités suivants :

— les représentations, en particulier la frise numérique permettant des déplacements un à un ou une ligne numérique permettant des sauts associés à des calculs ;
— les procédures de calcul qui peuvent prendre plusieurs modes : **calcul en ligne**, **calcul mental** ou encore **calcul posé** ;
— les niveaux de formalisation mathématique : ils se traduisent par des écritures ou des formulations plus orales (comme par exemple dans le cas : « **pour trouver le nombre qui manque dans 3 + ? = 21, je peux chercher 21 – 3 = ?** ») ;
— les calculs intermédiaires plus ou moins adaptés aux nombres en jeu.

Notons que le professeur peut rencontrer des procédures difficiles à classer dans une de ces trois catégories car elles semblent présenter des caractéristiques de chacune de celles-ci. La production de l'**élève I** en est un exemple.

Élève I : l'élève dessine 21 croix en deux collections comme l'élève C mais écrit : « *3* » et « *18* », fait une ébauche d'arbre de calcul symbolisant les relations entre les nombres et écrit : « *21* ».

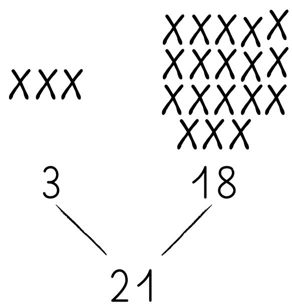


Figure 2. Production de l'élève I.

Il est difficile d'interpréter cette procédure qui semble relever de chacune des trois catégories ci-dessus. Un entretien avec l'élève permet toutefois de mieux comprendre sa démarche, sans savoir s'il s'agit d'une restitution fidèle ou d'une reconstitution.

La question qui se pose au professeur de CP est donc celle-ci : comment gérer cette hétérogénéité de réponses (dont nous n'avons donné qu'un échantillon à travers ces neuf élèves) ? Comment qualifier ces différentes réponses et amener tous les élèves à reconnaître et à traiter le problème posé comme un problème additif se traduisant par une soustraction ou une addition à trou ?

Comment créer les conditions de la réussite des élèves ?

Un objectif majeur est d'amener l'élève de fin de CP à reconnaître et résoudre des problèmes du type parties-tout à partir d'énoncés dont l'objet est de déterminer le cardinal d'une des parties connaissant l'autre partie et le tout ou de déterminer le cardinal du tout connaissant chacune des parties. Le document relatif aux attendus propose des exemples de problèmes devant être réussis au CP. Toutefois, il ne précise pas explicitement le degré de formalisation de la réponse alors qu'il existe différents chemins pour produire la réponse attendue.

On peut donc considérer que, pour ce type de problème, l'élève doit pouvoir, dans le domaine numérique évoqué, proposer une réponse juste exprimée sous forme d'une écriture additive ou soustractive traduisant la relation existant entre les trois nombres et s'accompagnant éventuellement d'un schéma. Si une réponse donnée sous la forme d'une écriture additive est acceptable (par exemple 11 + 16 = 27), il doit pouvoir comprendre qu'une des écritures soustractives associées à celle-ci (par exemple 27 – 11 = 16) traduit également la situation.

Mettre en réseau les connaissances des élèves

Le travail du professeur est d'organiser l'apprentissage, en proposant aux élèves une suite de situations permettant de ménager à la fois des moments où l'élève pourra franchir lui-même ou avec ses pairs des étapes correspondant à un passage plutôt « naturel », et des moments où l'enseignant intervient plus directement pour apporter de l'information ou justifier ce franchissement par un apport indispensable.

Il s'agit donc pour le professeur de penser à une progression qui allie à la fois un jeu sur les variables des énoncés de problèmes (la taille des nombres par exemple), des moments d'acquisition de connaissances par les élèves et des moments de réinvestissement lors de résolution de problèmes (mise en réseau de ces connaissances) mais aussi des moments où le professeur apportera des informations permettant certains sauts conceptuels. Dans tous les cas, cela nécessite des moments d'institutionnalisation de sa part, des moments où il identifie avec et pour tous les élèves les montées en abstraction. Cela nécessite aussi qu'il organise les moments de verbalisation.

En termes de résolution de problèmes, l'objectif est de permettre à un élève lisant un énoncé de reconnaître (explicitement ou implicitement) le modèle sous-jacent et de mettre en œuvre les procédures permettant de le résoudre.

Rappelons que le but n'est pas d'enseigner aux élèves de CP (ni à ceux de l'école élémentaire) une classification formelle de problèmes élémentaires telle qu'elle peut être présentée dans des recherches en didactique des mathématiques[2], mais d'amener les élèves à reconnaître progressivement différents problèmes pouvant relever des structures additives (champs additifs) et multiplicatives et d'automatiser la reconnaissance de l'opération.

2 — Notamment une nomenclature associée et l'utilisation systématique d'un format de schéma permettant au chercheur de décrire et de modéliser le raisonnement associé à un type de problème.

Interroger les domaines numériques, les procédures de dénombrement ou de calcul mobilisables

Le choix des nombres intervenant dans le problème peut amener l'élève à privilégier certaines procédures. C'est le cas pour les procédures de surcomptage ou de décomptage ; c'est aussi le cas pour provoquer le passage de ces procédures de dénombrement (stratégie 1 ou stratégie 2) à des procédures de calcul (stratégie 3). La taille des nombres en jeu constitue un élément important permettant de faire évoluer les procédures des élèves. De grands nombres rendent les stratégies de dénombrements coûteuses et peuvent favoriser le recours au calcul.

Ainsi, la mobilisation de calculs faisant appel à des faits numériques mémorisés constitue, pour l'élève, une économie qui justifie leur apprentissage et leur mémorisation. Il en est de même des différentes procédures de calcul et de leur évolution. Reproduire systématiquement le décomptage de 21 à 18 peut être considéré comme plus coûteux que la décomposition en deux calculs faisant appel à deux faits numériques mémorisés : « 21 – 1 = 20 » (décomposition canonique de 21) puis « 20 – 2 = 18 » (complément à 20 sachant que la décomposition « 1 + 2 = 3 » relève des apprentissages du cycle 1) puis du seul fait numérique « 21 – 3 = 18 ».

Toutefois cette prise de conscience ne peut se faire que si l'élève a mémorisé les faits numériques susceptibles d'être convoqués. Cela nécessite donc que le professeur ménage des moments de calcul mental et des moments de travail des techniques de calcul en ligne afin de constituer un **répertoire** suffisant de faits numériques pouvant être rappelés à bon escient lors de la résolution du problème (compléments à 10, doubles, etc.). Cela implique également un travail régulier sur l'exploration et l'enrichissement des décompositions additives de certains nombres (écritures additives et soustractives).

La résolution de problèmes est donc à mettre en relation avec l'enseignement de la numération et du calcul. L'apprentissage de la numération et notamment des différentes décompositions des nombres permet d'enrichir et d'optimiser les procédures de résolution de problèmes.

Inversement, la résolution de problèmes utilise les connaissances installées à cette occasion en numération et justifie en retour l'apprentissage de ces connaissances. **Cette relation entre numération et résolution de problèmes dépasse largement l'intérêt d'un travail sur les décompositions additives des nombres.**

Pour conclure, un premier principe pour élaborer une progression sera de penser une alternance entre moments de découverte, d'exploration des décompositions des nombres, mises en relation de ces connaissances avec des techniques de calcul (mentales ou en ligne puis posées), et moments de résolution d'un type de problème.

Un retour sur la résolution du problème avec d'autres variables numériques – plus grandes ou prenant en compte les propriétés des nombres relativement à la multiplication (multiples) ou de la division (diviseurs) – complète et renforce ces premiers apprentissages.

Le professeur peut jouer sur les variables numériques pour faire évoluer les procédures des élèves. Il peut aussi jouer sur le contexte évoqué par l'énoncé du problème et notamment sur les grandeurs en jeu afin d'amener l'élève à repérer que ce sont des procédures semblables et des opérations qui lui permettent de résoudre le problème. Par exemple en faisant intervenir dans la même structure d'énoncés d'autres grandeurs (**continues** ou **discrètes**) comme les prix, les longueurs ou les masses[3].

Cheminements cognitifs et adaptations de l'enseignement

Nous avons proposé, dans la première partie de l'introduction, une classification en trois grandes stratégies qui se déclinent en procédures. Ces procédures se distinguent par le type de raisonnement mis en œuvre ou par le type de dénombrement ou de calcul mobilisé. Ainsi, une procédure s'appuyant sur un surcomptage est différente d'une autre convoquant un décomptage. Notons à ce propos que la mobilisation du comptage est plus fréquente chez les élèves de CP que celle du décomptage, qui nécessite une connaissance plus approfondie de la suite numérique liée à la possibilité de l'explorer « à reculons ».

De même, des ruptures correspondant à des sauts conceptuels distinguent les différentes procédures. C'est le cas du passage de la manipulation effective d'objets (dans notre cas, des images ou des objets représentant ces images) à la représentation par un dessin figuratif de ces objets puis à un schéma plus ou moins figuratif (représenter la collection par des rectangles est plus proche du dessin de l'image que la représenter à l'aide de croix, de ronds ou de points). C'est aussi le cas du passage d'une collection non organisée à une collection faisant apparaître une partition en deux sous-collections ou une décomposition particulière du ou des nombres. C'est également le cas du passage d'un dénombrement oral (s'appuyant sur le dessin ou le schéma) à l'écriture de nombres par l'élève.

L'objectif est d'amener progressivement l'élève à faire le calcul en utilisant les symboles des nombres. L'élève doit prendre conscience de la « puissance » des nombres, qui permettent d'anticiper le résultat d'une action. La manipulation ou le dessin changeront alors de statut. Ils permettront dans un premier temps de trouver le résultat et plus tard de le vérifier. Ils seront par la suite reconnus comme « inutiles » quand l'élève sera capable d'anticiper, voire de calculer. Toutefois, pour certains élèves en difficulté, ce recours à des objets matériels ou à des dessins peut s'avérer profitable plus longtemps.

3 — Exemple de problème : « *Florence et Sonia ont mis ensemble leur argent pour acheter un livre à 21 €. Florence a donné 18 €. Combien Sonia a-t-elle donné ?* »

Une étape déterminante, emblématique de l'enseignement des mathématiques au CP par rapport à la maternelle, se situe dans le passage d'une procédure de dénombrement (comptage, surcomptage ou décomptage) à la traduction de celle-ci en termes d'écritures additives ($7 + 5 = 12$) ou soustractives ($12 - 7 = 5$). Cette étape suppose notamment que l'élève donne du sens à ces écritures par la mobilisation de faits numériques reconstruits puis progressivement mémorisés.

Enfin, il est raisonnable de penser qu'une autre rupture (ou saut conceptuel), en relation avec la précédente, réside dans le passage de l'écriture additive à l'écriture soustractive et ce, notamment quand il s'agit d'un calcul proche du surcomptage. En effet, l'écriture additive (à trou) traduit plus spontanément le surcomptage (« pour aller à ») que l'écriture soustractive. Ce passage relève alors dans un premier temps davantage du respect d'une convention d'écriture (introduite par le professeur et ayant du sens pour les mathématiciens) que d'une montée plus « naturelle » en abstraction. Toutefois cela ne doit pas conduire le professeur à différer l'introduction d'une écriture soustractive qui témoignera d'une conceptualisation plus élevée. Notons que l'écriture soustractive est sans doute plus naturelle que l'écriture additive quand il s'agit du problème « *Pierre avait 21 images. Il en a perdu 3. Combien lui en reste-t-il ?* ».

Comment amener progressivement l'élève à produire des procédures se rapprochant puis faisant appel à un calcul ? Comment amener l'élève à passer de la manipulation (effective ou s'appuyant sur une représentation plus ou moins figurative) à l'abstraction ? Comment développer les verbalisations qui vont accompagner progressivement ces étapes ?

Exemple de deux cheminements cognitifs

Nous pouvons identifier plusieurs cheminements cognitifs possibles permettant de passer progressivement de la manipulation à la mise en œuvre de calculs pour résoudre le problème. Ces cheminements sont initialisés par quelques procédures bien définies, dont certaines sont privilégiées par les élèves. Nous présentons ci-après deux cheminements qui nécessitent des interventions différentes et adaptées du professeur. Nous nous limitons ici aux procédures initialisées par un surcomptage ou un décomptage.

DU SURCOMPTAGE AU CALCUL, DE L'ÉNONCÉ DU RÉSULTAT À LA MODÉLISATION

Le but est d'amener les élèves qui ont mobilisé une procédure relevant ou s'appuyant sur un surcomptage à passer progressivement et par étapes à des procédures de calcul. Ces étapes sont souvent nécessaires pour les élèves les moins performants. Elles leur permettent d'accéder progressivement aux procédures efficaces. D'autres élèves peuvent s'en dispenser.

Passage de la manipulation d'objets au surcomptage sur des schémas. Le passage d'une production s'appuyant exclusivement sur la manipulation (élève A) à celle s'appuyant sur des dessins de rectangles (élève B) peut se faire par la mise en évidence des points de ressemblance dans la démarche. Il est possible de favoriser ce saut conceptuel en proposant dans un premier temps des objets physiques de plus en plus simples (images, rectangles de papier, jetons, cubes ou bâtonnets) puis en épurant progressivement le dessin, du dessin d'images à celui de rectangles (élève B) puis de bâtons ou de croix (élève C). Ce passage de la manipulation à des dessins ou des schémas ne doit être envisagé que lorsque la résolution s'appuyant sur la manipulation est maîtrisée par l'élève. Il ne se fait pas brutalement, mais progressivement ; l'élève pourra ainsi traiter aisément certains problèmes par un simple schéma, mais pourra avoir besoin de recourir à la manipulation d'objets pour un autre type de problèmes.

Passage du surcomptage (oral) à l'écriture des nombres en chiffres. Bien que non obligatoire, ce passage peut encourager ensuite le recours à la frise numérique (complète ou non) ou à la ligne numérique. Le professeur s'attachera à mettre en relation le dénombrement un à un des objets – et conjointement leur énoncé oral – avec leur écriture chiffrée et l'équivalence entre compter les croix et utiliser les nombres.

Passage du surcomptage s'appuyant sur des écritures chiffrées au surcomptage avec appui sur la frise numérique. Ce passage est assez naturel dans la mesure où l'écriture en ligne des nombres est proche d'une disposition de ces nombres sur la frise numérique.

Passage du surcomptage sur la frise numérique à celui d'un calcul par bonds sur cette frise numérique ou sur une ligne numérique. Ce passage devient plus naturel et permet d'expliciter la procédure mise en œuvre par l'élève H. Cela peut impliquer soit un appui sur une ligne numérique présentant les différentes étapes (bonds), soit l'introduction de notations semblables à celles employées par l'élève H et leur traduction en une écriture additive.

Passage du calcul sur la frise numérique ou sur une ligne numérique à des procédures faisant intervenir des écritures formelles. Ce passage sera fait progressivement en s'appuyant sur une automatisation progressive des faits numériques associés.

Rappelons que la déclinaison de ces différents passages ne constitue pas des étapes obligatoires pour tous les élèves. Certains peuvent s'en passer alors que d'autres ont besoin d'en explorer une ou plusieurs. C'est au professeur d'adapter son enseignement aux difficultés rencontrées ou non par chaque élève dans ce passage progressif de la manipulation à l'abstraction en s'appuyant sur les verbalisations des élèves.

DU DÉCOMPTAGE AU CALCUL

Un autre cheminement va consister à optimiser progressivement les procédures de décomptage pour déboucher sur des procédures de calculs se traduisant par des écritures soustractives. Les différentes étapes sont analogues à celles proposées pour aller du surcomptage au calcul.

Par exemple, pour le passage de la procédure mise en œuvre par l'élève D à celle mise en œuvre par l'élève E, il suffit de montrer que le recours au comptage auxiliaire sur les doigts peut être remplacé par le comptage du nombre d'écritures chiffrées inscrites.

CONCLUSION

Ces deux cheminements cognitifs sont différents, même s'ils mobilisent des outils identiques (comptage sur les doigts, écritures chiffrées, frise numérique, etc.) et présentent des étapes semblables (en termes de montée en abstraction). Ils se différencient par les faits numériques, les écritures et les opérations mobilisées (addition puis soustraction dans le premier cas, soustraction dans le second cas).

En fonction de la procédure individuelle de l'élève, le professeur pourra prendre en compte les différents cheminements en adaptant son intervention. Cela suppose qu'il puisse les identifier en classe à partir des productions des élèves. Cela nécessite une observation fine des élèves lors des activités de classe. En revanche, le nombre limité de procédures proposées spontanément par les élèves peut amener le professeur à enrichir la palette des procédures produites afin de faciliter certains des passages explicités ci-dessus. Pour cela, il pourra introduire lui-même certaines procédures n'ayant pas été produites par les élèves de la classe, par exemple en évoquant les productions (orales ou écrites) d'autres élèves rencontrées dans une autre classe.

Des modalités d'institutionnalisation

Lors des moments de synthèse et d'institutionnalisation, le professeur s'attache à faire expliciter les productions des élèves. Quand il le juge possible, le professeur hiérarchisera les procédures mises en œuvre en prenant en compte leur efficacité et leur économie afin de montrer qu'elles ne se valent pas toutes. De manière à réduire le temps consacré à ces moments de synthèse, le nombre de procédures exposées est limité ; ce choix effectué par le professeur répond à deux critères au moins : exposer la ou les procédures efficaces, permettre à l'élève de se repérer dans la hiérarchie de procédures et de franchir des étapes du cheminement dans lequel il s'est inscrit.

En fonction de la qualité et de la diversité des productions des élèves, il peut apporter des exemples de procédures ménageant les étapes nécessaires pour faire évoluer certaines procédures non mobilisées par les élèves de la classe. Quand les productions des élèves sont suffisamment riches, pour les rendre accessibles, il peut aussi introduire des éléments de formalisation mathématique (schémas ou écritures) et identifier, voire introduire la ou les procédures attendues. Dès que les performances des élèves dans le domaine de la lecture et de l'écriture le permettent, ces institutionnalisations doivent s'appuyer sur des écrits. Ces moments sont aussi l'occasion d'identifier les énoncés qui relèvent d'un même type de problème.

Le traitement des erreurs

Revenons maintenant sur l'erreur produite par un élève qui propose comme solution « *21 + 3 = 24* » au problème précédent. Cet élève n'a pas reconnu une situation de soustraction. Avant de l'aider à développer un raisonnement lui permettant d'élaborer une réponse juste, un moyen de lui montrer son erreur est d'attirer son attention sur la pertinence de sa réponse. Le professeur pourra par exemple lui demander : « *Si Paul a 24 images et si Pierre en a 3, combien en ont-ils à eux deux ?* »

Nous avons ici une modalité de traitement individualisé de l'erreur. Celui-ci peut être complété avantageusement par un traitement collectif. Ainsi, lors de la phase collective d'explicitation des productions des élèves, le professeur peut écrire au tableau l'ensemble des réponses des élèves et demander à la classe quelles sont les réponses qui ne sont pas acceptables ; les élèves doivent justifier leurs propositions en argumentant leurs choix. Cette modalité de travail s'installe sur la durée. En début d'année, les élèves peuvent éprouver beaucoup de difficulté à répondre à cette demande qu'ils ne comprennent pas. Le professeur pourra alors, lors d'une phase collective, poser des questions du type de celle évoquée ci-dessus. Puis dans un second temps, plusieurs élèves (souvent les élèves les plus performants en mathématiques) relayent le professeur. Sur une année, cette pratique concerne de plus en plus d'élèves, y compris ceux en difficulté. Cet apprentissage est toutefois fragile et doit être repris suffisamment de fois et sur une période longue dépassant souvent une année pour amener les plus faibles à se l'approprier.

I

Quels systèmes de numération enseigner, pourquoi et comment ?

L'importance de l'apprentissage de la numération est stipulée dans les programmes et la documentation officielle. Deux systèmes de numération y sont évoqués : d'une part les noms des nombres à l'oral qui se trouvent dans la **comptine numérique** en français, d'autre part les **désignations écrites chiffrées** des nombres qui utilisent dix chiffres. Ce sont **deux** systèmes de numération distincts. Les élèves qui arrivent au CP savent nommer les nombres jusqu'à trente, via la connaissance de la **comptine numérique** en français, sans pour autant savoir les écrire avec des chiffres. Il est moins usuel de percevoir la possibilité d'écrire les nombres avec des chiffres sans savoir les nommer. Ceci permet alors d'envisager un travail des deux systèmes de numération qui ne suit pas nécessairement la même progression du champ numérique tout au long de l'année.

Deux systèmes de numération objets d'enseignement au CP

Selon les programmes, les élèves de fin de maternelle doivent connaître le nom des nombres jusqu'à trente, via la comptine numérique : c'est la numération orale utilisée en France. Les élèves mobilisent ces noms dans différentes tâches, comme celles engageant des dénombrements par comptage un à un. Ils connaissent aussi les écritures chiffrées de certains de ces nombres, sans avoir tous les mêmes acquis concernant ces désignations et leurs différentes utilisations pour résoudre des problèmes (par exemple de réunion de collections) ou pour explorer les relations entre les nombres (comme certaines décompositions).

Les habiletés des élèves en comptage un à un et les connaissances du lien entre le nom des nombres et leur écriture chiffrée ne suffisent pas pour construire ces compétences. Ils doivent appréhender les aspects décimaux et positionnels des écritures chiffrées qui sont gages de la compréhension du système de numération écrit chiffré. Ils doivent apprendre le nom des nombres en repérant la structure dans la comptine numérique.

Or, la compréhension de ce qui doit devenir pour eux deux systèmes de numération conditionne en particulier toutes les connaissances sur le calcul : les ressources de la numération orale pour le **calcul mental**, celles de la numération écrite chiffrée pour le **calcul posé** (cf. chapitre 2).

Au CP, comment faire alors le lien entre les connaissances de la maternelle et celles dont les élèves auront besoin ultérieurement ? Que sont exactement ces deux systèmes de numération ? Quel est leur rôle dans l'apprentissage du nombre ?

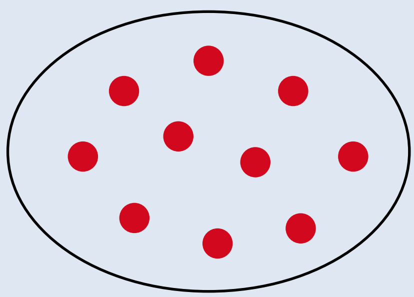
On reproche souvent au système de numération oral utilisé en France d'être irrégulier, constituant un écueil pour comprendre le système de numération écrit chiffré. Nous allons, au contraire, voir comment des régularités dans le système oral peuvent devenir un levier pour l'enseignement de la numération. Ensuite, nous reviendrons sur la numération écrite chiffrée, pour finalement nous intéresser aux ressemblances et différences entre les deux systèmes.

Des nombres sans numération, ça existe !

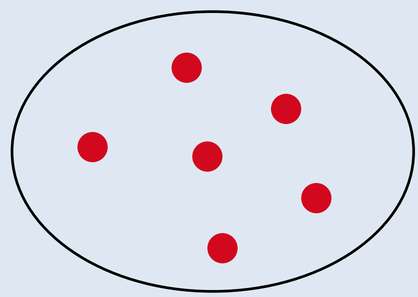
Considérons les exemples ci-dessous dans lesquels on demande de comparer à chaque fois les quantités dans les collections A et B. Quelles **procédures** envisager ?

EXEMPLE 1

Collection A :

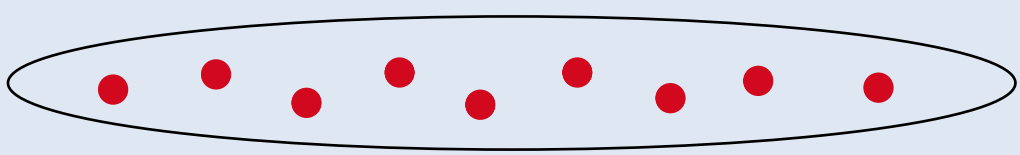


Collection B :

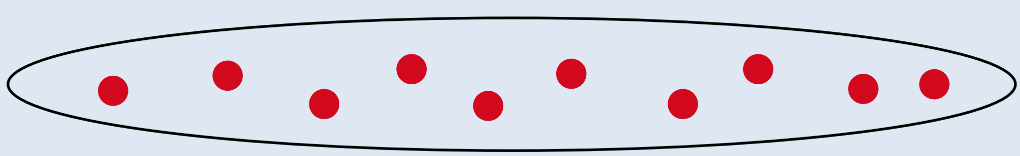


EXEMPLE 2

Collection A :



Collection B :

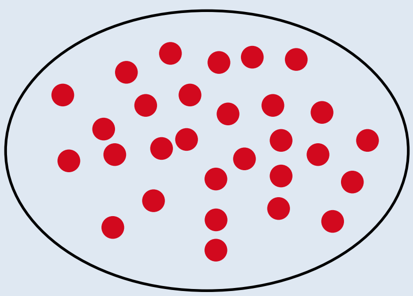


Dans l'exemple 1, une perception visuelle globale permet de répondre facilement que la collection A possède plus d'éléments que la collection B. Pour l'exemple 2, une correspondance terme à terme – pas aussi facile visuellement – permet de conclure que la collection B possède plus d'éléments que la collection A. Pour ces exemples, il existe au moins **une procédure** ne s'appuyant sur aucune désignation du nombre, permettant pourtant d'affirmer qu'il y a plus d'éléments dans une collection que dans l'autre.

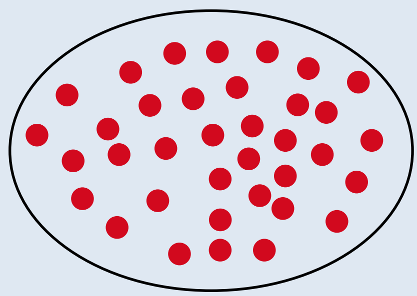
Ainsi peut-on aborder des problèmes mettant en jeu le nombre, sans convoquer de numération : ce n'est évidemment pas toujours le cas comme le montre l'exemple 3.

EXEMPLE 3

Collection A :



Collection B :



Voici quatre procédures pour comparer les quantités :

PROCÉDURE 1. « CORRESPONDANCE TERME À TERME »

Barrer un élément de la collection A, puis un de la collection B, voir dans quelle collection il reste des éléments non associés[4]. Cette **procédure** ne nécessite pas l'utilisation des noms des nombres, ni celle de leur écriture chiffrée.

PROCÉDURE 2. « NOM DU NOMBRE PAR COMPTAGE UN À UN »

Obtenir le nom du nombre de points de chaque collection puis utiliser ces noms pour comparer les quantités (ordre d'arrivée dans la comptine numérique). Cette procédure ne nécessite pas d'utilisation de l'écriture chiffrée.

PROCÉDURE 3. « NOM DU NOMBRE PAR COMPTAGE DE DIX EN DIX »

Procédure identique à la précédente, mais avec prise en compte de dizaines et obtention du nom du nombre en mobilisant aussi la comptine des dizaines (dix, vingt, trente, etc.). Le recours à l'écriture chiffrée n'est pas nécessaire.

4 — Une correspondance entre groupements identiques est aussi possible, par exemple avec des dizaines.

PROCÉDURE 4. « ÉCRITURE CHIFFRÉE »

Organiser chaque collection en un maximum de dizaines, puis la coder à l'aide de l'écriture chiffrée. On écrit le nombre d'éléments en accolant dans l'ordre conventionnel le chiffre indiquant le nombre de dizaines et celui indiquant le nombre d'éléments restants. Ensuite on conclut en comparant les écritures ainsi obtenues (cf. focus « Une séquence d'apprentissage sur la numération écrite chiffrée », p. 40). L'utilisation du nom des nombres, au-delà de dix, n'est pas nécessaire.

Deux numérations sont ainsi convoquées : qu'est-ce qui les distingue ?

Le système de numération oral utilisé en France : le nom des nombres

Dans la comptine numérique utilisée en France, nous pouvons repérer des régularités, en particulier du fait que certains mots sont répétés. Certaines dizaines seront appelées « repérants » : vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, quatre-vingts. En outre, les premiers noms des nombres, un, deux, trois, etc., sont repris afin d'atteindre le prochain repérant. Notons que ni soixante-dix ni quatre-vingt-dix ne sont des repérants (car ils ne sont pas répétés), ce qui vaut à notre comptine sa (mauvaise) réputation : elle est qualifiée d'irrégulière, par rapport à des numérations orales présentant des repérants de dix en dix. En outre, même en Suisse et Belgique, « dix » reste un cas à part puisqu'il n'est repris entre dix et vingt que pour trois noms de nombres, dix-sept, dix-huit et dix-neuf, qui sont bien loin de dix. Pour un élève apprenant la comptine, il est très difficile de comprendre cet écart/éloignement. À la maternelle ou en début de CP, l'élève ne repère d'ailleurs pas nécessairement la reprise du mot dix, d'autant que les noms des nombres ne sont pas encore traduits par une écriture littérale. Dix-sept est alors entendu phonétiquement « dissette ». Ainsi la prise de conscience pour l'élève de tels ou tels repérants dépend de l'enseignement prodigué, mais aussi de certaines caractéristiques inhérentes au système.

Concernant la comptine utilisée en France, il est possible de ne pas mettre en exergue le repérant dix. Cela met en évidence une structure dont la compréhension semble plus accessible aux élèves puisqu'il devient alors possible de mettre l'accent sur des régularités. Il s'agit de mettre en jeu deux types de comptine, la « grande comptine » (GC) de un à dix-neuf, et la « petite comptine » (PC) de un à neuf. Pour atteindre chaque repérant, on utilise soit l'une soit l'autre selon le modèle de la figure 3 ci-dessous. Des modèles de frises numériques pour la classe sont proposés dans le paragraphe de ce chapitre intitulé « Lire et écrire les nombres » p. 37, et au chapitre 4.

Grande comptine	vingt	Petite comptine	trente	PC	quarante	PC	cinquante	PC	soixante	GC	quatre-vingts	GC	cent

Figure 3 . La structure de la numération orale.

Cette solution favorise la mémorisation de la comptine par le comptage un à un prenant appui sur les repérants mis en exergue (procédure 2 de l'exemple 3).

Bien que la structure de la comptine n'ait pas été fondée historiquement sur des principes arithmétiques, qu'ils soient additifs (vingt-trois vu comme vingt plus trois) ou multiplicatifs (quatre-vingts vu comme quatre fois vingt), cette comptine est un support efficace au calcul mental qui s'appuie sur des relations arithmétiques. Un des défis de l'enseignement au cycle 2 est donc cette utilisation de la comptine numérique à des fins de calcul mental.

La comptine des dizaines (dix, vingt, trente, etc.) peut être employée à partir de dix pour faciliter le dénombrement. Elle dévoile alors une autre caractéristique de la comptine numérique : le fait qu'entre deux repérants il y a une ou deux dizaines d'écart (selon qu'on utilise la petite ou la grande comptine). Cet aspect « dizaine » de la comptine numérique apparaît en second lieu, après celui de sa structure ponctuée par la petite et la grande comptine. Cependant, ni la procédure 2, ni la procédure 3 de l'exemple 3 ne font apparaître explicitement le nombre de dizaines. Ce n'est pas le cas de la procédure 4 qui utilise les ressources du système de numération écrit chiffré comme nous le verrons.

Le système de numération écrit chiffré utilisé dans le monde : une écriture partagée des nombres

La numération écrite chiffrée n'est pas la version écrite de la numération orale. Différents systèmes écrits ont coexisté avec les numérations orales d'origine latine[5]. Ce n'est que très tardivement que l'écriture chiffrée a été utilisée dans le monde occidental[6], et encore plus tardivement qu'elle s'est vraiment imposée, notamment pour faciliter les calculs. La numération écrite chiffrée dite « indo-arabe » a été élaborée en Inde vers le VIe siècle et transmise par le monde arabe en Occident. Elle est actuellement la numération écrite qui s'est imposée dans le monde entier alors même que les numérations orales ont leur logique propre, parfois bien éloignée de la numération orale utilisée en France.

Le système de numération écrit chiffré est un système de désignation des nombres qui utilise dix symboles[7], les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Une suite de chiffres alignés va désigner un nombre selon un principe décimal et un principe positionnel.

Le principe décimal prend en compte des unités de numération successives pour désigner un nombre. La dizaine, c'est dix unités simples. C'est la première facette du principe décimal. La centaine, nouvelle unité de numération, c'est dix dizaines.

5 — Cette histoire des numérations est relatée par Georges Ifrah dans son ouvrage *Histoire universelle des chiffres* (1981).
6 — Gerbert d'Aurillac (vers 946-1003), savant et humaniste, pape sous le nom de Sylvestre II, y joue un rôle important.
7 — Graphie indienne transformée par les Arabes. Voir note 5 sur Georges Ifrah.

La suivante, c'est le millier, défini comme étant dix centaines, etc. On voit ici à l'œuvre la deuxième facette du principe décimal : l'utilisation de dix pour générer les unités de numération supérieures.

Le principe positionnel renvoie au fait qu'en partant de la droite chaque chiffre est à référer à une unité de numération supérieure.

Notons, dès à présent, que pour les nombres qui sont objets d'enseignement au CP, il n'est pas obligatoire d'aborder l'unité de numération « centaine ». Il est par contre possible d'envisager plus de dix dizaines dans les nombres, sans que ne soit formalisé le fait que dix dizaines sont égales à une centaine, ce qui relève de l'enseignement du CE1.

Le système de numération écrit chiffré ne requiert pas une connaissance de la numération orale[8]. Il est cependant nécessaire de comprendre la dizaine comme à la fois une nouvelle unité de dénombrement (une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, etc.) et un synonyme de « dix ». D'un point de vue pratique, la construction du système se faisant via des dénombrements, il va s'agir *a minima* de former des groupements de dix éléments. La comptine de un à dix est alors mobilisée, mais, on le voit, sans qu'il ne soit nécessaire d'aller au-delà. La procédure 4 de l'exemple 3 joue un rôle central pour aborder le système de numération écrit chiffré : organiser la collection en un nombre maximum de dizaines, compter le nombre de dizaines et d'éléments restants, accoler les deux chiffres obtenus dans l'ordre conventionnel. Contrairement aux procédures 1, 2 et 3, le nombre de dizaines est explicite.

Le rôle des deux systèmes de numération dans l'apprentissage du nombre

La numération orale est essentiellement ordinale, dans le sens où elle est constituée d'une suite d'items qu'il faut connaître par cœur pour qu'elle soit opérationnelle dans le dénombrement par comptage. Le dernier objet pris en compte apparaît d'abord comme le n-ième (tel objet précis), et il faut donc comprendre que l'item de la comptine prononcé alors (par exemple « soixante-huit ») ne désigne pas uniquement le soixante-huitième objet considéré, mais aussi le nombre total d'objets, c'est-à-dire la quantité totale, ou de manière plus savante le cardinal de l'ensemble des objets considérés : le dernier nom de nombre prononcé est la mémoire de cette totalité. Autrement dit, on utilise les ressorts de l'aspect ordinal pour accéder à l'aspect cardinal. *A contrario*, la numération écrite chiffrée permet d'écrire (avec des chiffres) n'importe quel nombre et ceci dès que ses principes ont été compris (utilisations de dix chiffres, principe décimal, principe positionnel). L'aspect cardinal est davantage présent dans le sens où la quantité totale peut être directement signifiée, par exemple par la procédure « écriture chiffrée », sans pour autant considérer la désignation de la suite croissante des quantités plus petites, comme c'est le cas dans un comptage.

8 — Pour ajouter, multiplier ou même comparer 23 456 et 12 345, il n'est pas obligatoire de savoir le nom de ces nombres. Il en est de même par exemple pour comparer 68 et 71 (cf. focus « Une séquence d'apprentissage sur la numération écrite nombres », p. 40).

Les calculs proposés aux élèves ou ceux qu'ils sont amenés à rencontrer lors d'une résolution de problèmes peuvent solliciter l'un ou l'autre des deux systèmes de numération. Certaines situations impliqueront l'usage des adjectifs ordinaux (premier, deuxième, etc.) dans des repérages spatiaux ou temporels : l'ordre dans un rang, une file, une liste, la chronologie d'événements. D'autres joueront essentiellement sur des quantités qui seront dénombrées, comparées ou estimées. Les nombres peuvent aussi être comparés, encadrés, ordonnés hors de tout contexte, pour eux-mêmes. Il s'agira de proposer aux élèves des problèmes qui mettent en jeu des cheminements cognitifs divers (cf. l'introduction de ce guide), notamment dans le but d'apprendre et de distinguer les deux systèmes de numération.

Un travail sur chaque système de numération doit être mené : comprendre la structure de la comptine numérique pour mieux l'apprendre (les repérants, la grande comptine et la petite, la comptine des dizaines), comprendre la structure de la numération écrite chiffrée (principe positionnel et principe décimal).

D'autres représentations comme les constellations, les doigts de la main, des désignations en termes d'unités de numération ou encore des écritures littérales sont également utilisées à l'école maternelle et au CP, mais ces représentations ne sont pas des systèmes de numération au sens où les règles de fonctionnement qui les régissent ne vont pas pouvoir désigner tous les nombres entiers de manière unique et exhaustive (au moins jusqu'à une certaine limite). Elles ne permettent pas de faire des calculs aussi efficacement que les deux systèmes de numération qui apparaissent distinctement au CP mais ces autres représentations aident aux premiers apprentissages numériques.

Apprendre et enseigner les systèmes de numération

Les problèmes sont à la fois moyens et objectifs d'apprentissage du nombre, comme le montrent les différents chapitres de ce guide. Cependant, le cadre des dénombrements, estimations et comparaisons de quantités est essentiel pour l'enseignement des deux systèmes de numération, et c'est lui que nous allons mobiliser ici.

Retenons tout d'abord que le nombre de dizaines n'est pas explicite dans la numération orale, alors qu'il l'est dans la numération écrite chiffrée. En effet, ni le dénombrement un à un, ni même celui utilisant la comptine des dizaines, ne donne un accès direct au nombre de dizaines. C'est le propre des écritures chiffrées de signifier d'emblée ce nombre de dizaines (et d'unités restantes). Deux procédures jouent alors un rôle prépondérant : la procédure « nom du nombre par comptage de dix en dix », et la procédure « écriture chiffrée ».

PROCÉDURE « NOM DU NOMBRE PAR COMPTAGE DE DIX EN DIX »

Obtenir le nom du nombre en considérant le maximum de dizaines, ce qui permet de recourir à la comptine des dizaines (dix, vingt, trente, etc.) puis à celle de un en un pour les éléments restants. L'utilisation de l'écriture chiffrée n'est pas nécessaire.

PROCÉDURE « ÉCRITURE CHIFFRÉE »

Organiser la collection en un maximum de dizaines, puis la coder à l'aide de chiffres. On écrit avec un chiffre le nombre de dizaines et avec un autre celui des éléments restants. On accole ensuite ces chiffres dans l'ordre conventionnel. L'utilisation du nom du nombre n'est pas nécessaire.

Ces deux procédures permettent de mieux comprendre ce qui différencie et ce qui relie les deux systèmes de numération. Elles permettent en effet d'accéder à deux désignations différentes du nombre, et ceci de manière indépendante. Des recherches récentes montrent que les élèves de CE1 et CE2 obtiennent l'écriture chiffrée le plus souvent à partir du nom du nombre, et non directement via la procédure « écriture chiffrée »[9]. Typiquement, pour obtenir l'écriture chiffrée du nombre désignant une quantité d'objets, les élèves les comptent (souvent de un en un et plus rarement en utilisant des groupements par 10) et obtiennent le nom du nombre (par exemple l'oral « soixante-huit »). Ils cherchent alors à écrire avec des chiffres ce nom de nombre, comme ils le feraient en français en se fiant aux sons qu'ils entendent (d'où des réponses comme « 608 »). La procédure « écriture chiffrée » permet, elle, d'accéder directement à la réponse, sans passer par le nom du nombre et donc sans présenter (de manière erronée) les écritures chiffrées comme une version écrite de la numération orale. Il est donc pertinent d'amener *in fine* les élèves à disposer de ces deux procédures pour effectuer un dénombrement. Il s'agit de les faire dialoguer, d'en voir les avantages et les inconvénients.

Il est donc nécessaire d'enseigner de manière explicite cette procédure « écriture chiffrée », mais sans que cet enseignement soit dépourvu de sens (cf. l'introduction de ce guide), car il s'agira de permettre à l'élève de comprendre les aspects positionnel et décimal du système de numération écrit chiffré. Précisons ici que les procédures « nom du nombre par comptage de dix en dix » et « écriture chiffrée » sont particulièrement performantes quand la collection est déjà partiellement organisée en dizaines (par exemple en cinq dizaines et dix-huit éléments restants). En effet, cela oblige l'élève à faire un travail d'organisation de la collection (considérer les dizaines qui ne sont pas encore apparentes), mais cela disqualifie par ailleurs le comptage un par un (plus long à effectuer, plus long à vérifier et régulièrement source d'erreurs liées à l'énumération des objets[10]).

Atteindre l'objectif de dialogue entre les numérations, ici via l'utilisation des deux procédures précitées (cela peut se faire aussi via le calcul mental et le calcul posé, cf. chapitre 2), demande auparavant une construction des deux systèmes afin qu'ils soient mobilisables de manière indépendante. Dans la suite, deux grands types d'itinéraires d'enseignement sont distingués, ce qui amène à considérer la place de la dizaine dans les apprentissages.

9 — Voir Éric Mounier, Nadine Grapin, Nathalie Pfaff, « Lire et écrire les nombres. Quelle place dans l'apprentissage des numérations au cycle 2 ? », revue *Grand N*, n° 106, 2020 : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-106-grand-n/2-lire-ecrire-les-nombres-quelle-place-dans-l-apprentissage-des-numerations-au-cycle-2--750635.kjsp

10 — Voir Joël Briand, Marie-José Lacave-Luciani, Michèle Harvouët, Dominique Bedere, Véronique Goua de Baix, « Enseigner l'énumération en moyenne section », revue *Grand N*, 2000 : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/66n2_1555676483474-pdf

La dizaine au cœur des itinéraires d'enseignement

Il est possible de définir deux grands types d'itinéraires selon qu'on construit la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale ou bien indépendamment. **La dizaine est au cœur des deux enseignements.**

Deux itinéraires d'enseignement

Le premier itinéraire consiste à enseigner la numération écrite chiffrée à partir de la numération orale. Il s'agit le plus souvent de justifier des écritures que les élèves connaissent déjà. Par exemple, il est possible de partir d'un nom de nombre comme « quarante-deux » pour faire « apparaître » aux élèves les quatre dizaines et les deux unités restantes, ce qui éclaire son écriture « 42 ». Mais il faudra expliquer pourquoi ce n'est pas « 40 2 » : l'écriture chiffrée 42 n'est en effet pas la version écrite du nom du nombre quarante-deux, comme l'est l'écriture littérale « quarante-deux » pour le son « quarante deux ». Si l'on emprunte cet itinéraire, on peut faire évoluer les procédures de dénombrement citées précédemment : du comptage un à un vers la procédure « nom du nombre par comptage de dix en dix » puis vers la procédure « écriture chiffrée », cette dernière mettant en évidence le nombre de dizaines de manière explicite. Le paragraphe ci-contre intitulé « La dizaine en amont des systèmes de numération » décrit un exemple d'une séquence d'apprentissage menant à la nécessité d'organiser les collections en dizaines.

Le second itinéraire consiste à construire les deux systèmes de numération de manière indépendante pour ensuite faire des liens. De manière concrète, mettre en place cet itinéraire consiste à introduire directement l'écriture chiffrée comme un moyen d'indiquer à l'écrit le nombre d'éléments d'une collection, celle-ci ayant été par ailleurs organisée en un maximum de dizaines. Par la procédure « écriture chiffrée », c'est donc un accès à la quantité sans le nom du nombre qui est visé. Beaucoup d'élèves savent cependant dénombrer avec la comptine numérique dès le début du CP. Pour ce deuxième itinéraire, une solution consiste à confronter les élèves à des quantités suffisamment grandes pour atteindre des nombres dont ils ne connaissent pas de manière certaine l'écriture chiffrée (par exemple au-delà de cinquante). Le professeur peut partir de l'organisation d'une collection en un maximum de dizaines, obtenue par exemple via les situations écrites dans le paragraphe ci-contre, « La dizaine en amont des systèmes de numération ». La procédure « écriture chiffrée » est alors enseignée comme le moyen d'écrire ces nombres dont le nom n'a pas encore été objet explicite d'apprentissage. Ces nombres peuvent être désignés à l'oral en utilisant le vocabulaire des unités de numération, comme par exemple six dizaines et huit unités (au lieu de soixante-huit), associé aux collections organisées correspondantes (cf. le paragraphe intitulé « Les unités de numération », p. 38).

Par leurs différences, ces deux types d'itinéraires n'offrent pas les mêmes possibilités d'effectuer des liens entre les deux systèmes de numération et en particulier des traductions. Pour le premier, les noms des nombres sont généralement directement associés à leur écriture chiffrée. Pour le second, il s'agit de relier ces deux désignations *a posteriori* de leur découverte. Quel que soit l'itinéraire emprunté, il est pertinent de faire dialoguer dès que possible les deux systèmes de numération afin de découvrir des aspects différents du nombre : que permet de faire l'un ? Que permet de faire l'autre ?

Dans la programmation annuelle de la progression proposée à la fin de ce guide, deux grandes périodes d'apprentissage des deux systèmes de numération sont envisagées. Si le premier itinéraire a été emprunté, le champ numérique pour aborder les deux systèmes de numération est tout d'abord le même puisque les écritures chiffrées sont « extraites » des noms des nombres. Mais une fois les principes de la numération écrite chiffrée établis, les écritures chiffrées peuvent alors être travaillées directement jusqu'à 100, sans attendre que la comptine numérique soit complétement acquise par les élèves. Si le second itinéraire est emprunté, alors, dès le début, l'enseignement des deux systèmes de numération ne concernera pas le même champ numérique : la numération écrite chiffrée peut être en effet construite directement pour les nombres jusqu'à 100 en fin de période 2. Dans les deux cas, l'apprentissage de la comptine numérique suit le rythme de sa structure, faisant intervenir la grande et la petite comptine.

La dizaine en amont des systèmes de numération

Dans les deux types d'itinéraires, il est nécessaire de travailler la notion de dizaine en amont de la construction de la numération écrite chiffrée. En effet, dans le premier itinéraire, il s'agit d'« extraire » la dizaine des usages de la numération orale. Le nom des nombres et la structure générale de la comptine utilisée en France sont souvent cités comme un obstacle à franchir, plus important que pour d'autres langues. Cependant, même dans ce cas, le fait de dire « dix » dans une suite d'items ne suffit pas à comprendre ce que recouvre la dizaine. Il y a un saut conceptuel entre utiliser cette comptine pour dénombrer et comprendre que « dix » peut être une nouvelle unité de dénombrement, conventionnelle, qui peut être liée à l'idée d'une organisation globale de la collection en groupements. Ce besoin de faire apparaître ainsi la dizaine est aussi un préalable dans le second type d'itinéraire, puisque c'est à partir de cette organisation en dizaines que va pouvoir se poser la question d'écrire la quantité (sans qu'il ne soit besoin ici de la nommer).

La dizaine : comment la travailler ?

Une des difficultés est de faire percevoir aux élèves qu'une dizaine et dix désignent le même nombre. Le matériel qui permet de dissocier et d'associer des éléments est donc à favoriser au CP, par exemple des cubes emboîtables (cf. chapitre 4). En outre, il est souhaitable de ne pas parler de dizaines uniquement quand les objets sont assemblés. Par exemple, si une collection de 68 objets (68 est écrit au tableau) se présente sous la forme de 5 dizaines identifiables et d'éléments restants, les élèves doivent pouvoir indiquer qu'il y a plus de 6 dizaines (et moins de 7 dizaines) en se fiant à l'écriture chiffrée « 68 », sans avoir besoin de « voir » la 6e dizaine et donc d'organiser la collection. La vérification, souvent nécessaire au début des apprentissages, peut se faire ensuite matériellement.

Par ailleurs, des représentations diverses de la dizaine peuvent être convoquées (figure 4, certaines faisant apparaître des décompositions de manière explicite).

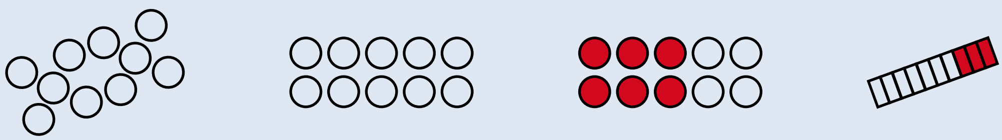


Figure 4. Différentes représentations de la dizaine.

EXEMPLE D'UNE SÉQUENCE D'APPRENTISSAGE SUR LA DIZAINE EN PÉRIODES 1 ET 2, SANS QU'IL NE SOIT NÉCESSAIRE DE MOBILISER LE COMPTAGE[11]

LA TÂCHE

Un jeu de **comparaison de deux quantités « proches »**, le plus souvent ayant au maximum une ou deux unités d'écart. Deux collections sont présentées aux élèves au tableau, en utilisant la vidéoprojection ou des jetons manipulables (aimantés) de deux couleurs (une pour chaque collection), de manière suffisamment rapide pour que les élèves n'aient **pas le temps de les dénombrer** par un comptage un à un. Une fois les deux collections cachées, chaque élève indique celle qui lui semble comporter le plus de jetons (ou bien s'il y en a autant dans les deux). **La validation se fait ensuite via la mise en correspondance un à un des jetons ou par groupements de jetons.**

LA PROGRESSION

Chaque étape peut comporter plusieurs séances de courtes durées, ritualisées, pour que les élèves soient confrontés collectivement au problème puis, une fois la solution trouvée, puissent s'entraîner individuellement ou en groupes. La solution adoptée collectivement consiste toujours en une organisation pertinente des deux collections, qui va évoluer selon les quantités à comparer : au début

11 — Voir Éric Mounier, « Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes », 2010 : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00550721v1/document

un groupement de cinq, puis plusieurs puis finalement des groupements de dix. C'est sur cette dernière étape concernant les dizaines qu'il est nécessaire d'insister en particulier pour les entraînements.

1re étape : comprendre le fonctionnement du jeu, pas de difficulté à comparer
- Nombre de jetons pour comprendre le jeu : inférieur à quatre.

2e étape : le groupement par cinq
- Nombre de jetons pour poser le problème : neuf dans chacune des deux collections, non organisés.
- Il est important de dire aux élèves que désormais la réussite doit être collective, dans le sens où tout le monde doit avoir la bonne réponse. Il y a donc nécessairement ici un échec. Le défi sera de trouver une solution pour que tout le monde réussisse.
- Solution adoptée ensuite collectivement : groupement par cinq (constellation du dé).
- Nombre de jetons pour les collections d'entraînement : jusqu'à neuf.

3e étape : plusieurs groupements par cinq
- Nombre de jetons pour poser le problème : treize et quatorze, avec un seul groupement de cinq de visible dans chaque collection.
- Solution adoptée ensuite collectivement : plusieurs groupements de cinq.
- Nombre de jetons pour les collections d'entraînement : jusqu'à vingt-quatre.

4e étape : groupements par dix
- Nombre de jetons pour poser le problème : quarante-deux et quarante-trois, organisés en groupements de cinq.
- Solution adoptée ensuite collectivement : des groupements par dix (deux « cinq » accolés).
- Nombre de jetons pour les collections d'entraînement : jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf. Le mot « dizaine » peut être introduit lors de cette étape, mais le travail sur la dizaine se poursuit toute l'année.
- Il est possible de poursuivre en posant la question de l'écriture des quantités ainsi organisées en dizaines. Pour indiquer la solution adoptée pour communiquer dans le monde entier, on peut alors enseigner la procédure « écriture chiffrée » dont il a été question précédemment dans le chapitre 1.

Questions récurrentes et questions nouvelles

Cette partie a pour but de donner des éléments de réponses à une sélection de questions.

Collections à dénombrer : quel travail des élèves ?

Le dénombrement de collections est une tâche qui se prête bien au travail sur les deux systèmes de numération. Il peut en premier lieu servir pour les construire. Le problème posé aux élèves peut être dans un premier temps de comparer des collections : où y a-t-il le plus d'objets ? Des procédures de correspondances terme à terme sont tout d'abord à privilégier pour donner du sens à cette question. Elles serviront plus tard pour valider les réponses des élèves lorsqu'ils utiliseront des procédures plus expertes : il y aura alors aussi la possibilité de faire des correspondances dizaine/dizaine.

La question est cependant celle de l'introduction de la dizaine. On peut alors proposer des collections dont les éléments sont manipulables mais ces collections ne peuvent être déplacées pour réaliser la correspondance terme à terme. Comment faire ? C'est la question posée aux élèves. Une première possibilité serait de les dénombrer. Le dénombrement un à un, souvent assez bien maîtrisé par les élèves pour des éléments manipulables, même en début de CP, peut s'avérer être une bonne solution. Cependant, il ne sert pas l'objectif du professeur concernant la dizaine. Il existe alors deux leviers pour bloquer cette procédure : jouer sur la variable « quantités en jeu » (nombre d'objets) ou/et sur la variable « durée » pour effectuer la comparaison. Par exemple, le groupement par dix offre une solution à la comparaison rapide de quantités au-delà de quarante. Il est ensuite possible d'introduire avec une organisation en dizaines les deux procédures (séparément ou non), « nom du nombre par comptage de dix en dix » et « écriture chiffrée ».

Il est par ailleurs efficace de proposer des collections qui ne sont que partiellement organisées. Les organisations peuvent se présenter sous la forme de 5 dizaines (facilement identifiables) et 18 unités, ou parfois même sous la forme de 3 groupes de cinq (constellations du dé), 4 dizaines et 13 unités. Elles sont, au début, toujours manipulables, puis elles ne le sont plus, ce qui requiert alors des connaissances concernant l'**énumération**.

Lire et écrire les nombres

Il s'agit ici de proposer des liens de traduction entre les deux systèmes de numération en respectant la structure de chacune. La numération écrite chiffrée ne doit pas apparaître comme la version écrite de la numération orale. Une première possibilité est alors l'emploi d'une frise numérique linéaire (cf. chapitre 4). Les sept sections de la frise de la figure 5 sont à afficher sur les murs les unes après les autres, constituant alors une unique file (et non un tableau).

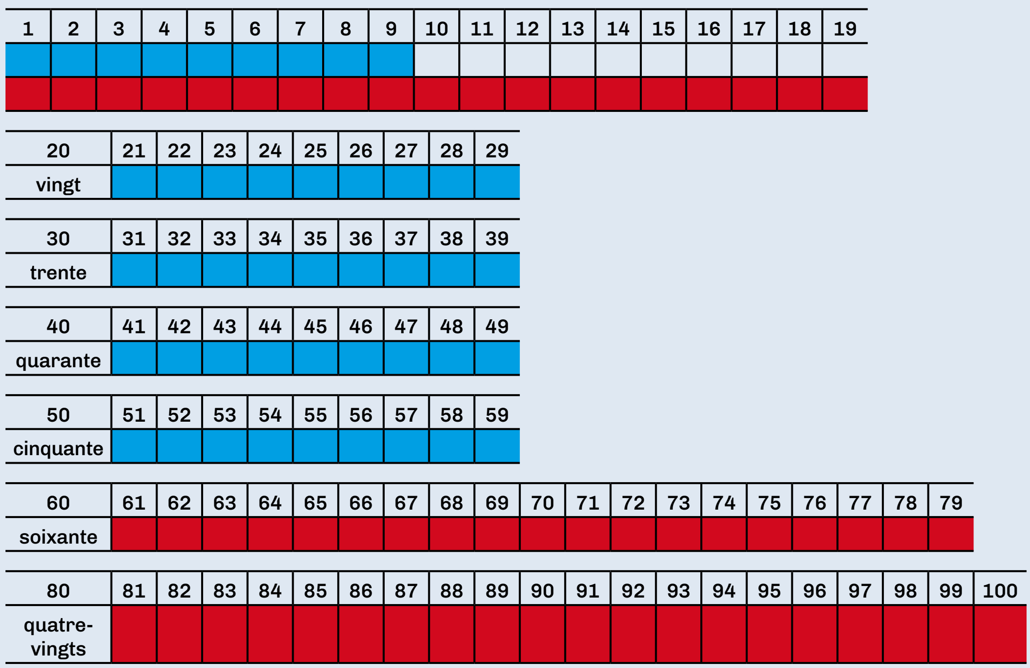


Figure 5 . Exemple de frise numérique. Les sept sections, découvertes et assemblées au fur et à mesure de l'année, forment une unique file.

Pour connaître le nom du nombre qui s'écrit « 72 », il s'agit de repérer « 72 » sur la frise et de remonter au premier repérant de la section qui est ici « soixante ». Il suffit alors de compter à partir de cette case, soixante, soixante-et-un, etc. et de s'arrêter à la case « 72 » pour obtenir la réponse « soixante-douze ».

Une deuxième possibilité, sans frise numérique, est cependant à enseigner : 72, c'est par définition sept dizaines et deux unités. Il est alors possible de réaliser la collection en utilisant par exemple le matériel usuel de numération de la classe (cf. chapitre 4). Ensuite il suffit d'utiliser la procédure « nom du nombre par comptage de dix en dix » pour obtenir la réponse. Un processus analogue permet de résoudre le problème inverse : trouver l'écriture chiffrée du nom du nombre. Il suffit de réaliser la collection organisée à l'aide de la comptine des dizaines, puis d'utiliser la procédure « écriture chiffrée » pour la dénombrer.

Les unités de numération

Les unités de numération utilisées au CP sont l'unité simple et la dizaine. Une dizaine est définie comme étant dix unités simples. Au CE1 apparaît une nouvelle unité de numération, la centaine.

Les unités de numération sont utilisées pour construire le système de numération écrit chiffré. Ainsi « 72 » est défini comme un codage, à l'aide de chiffres ordonnés (aspect positionnel), de l'organisation d'une collection en 7 dizaines et 2 unités simples (aspect décimal). Par la suite, les unités de numération permettent de « parler » des écritures chiffrées sans forcément avoir à prononcer le nom des nombres : si « 72 » est écrit, les échanges oraux en classe pourront faire état de « sept dizaines et deux unités ». Une fois la numération écrite chiffrée construite, elles permettent de travailler l'aspect positionnel ou/et l'aspect décimal, par exemple en demandant d'écrire en chiffres les nombres suivants :

— 5 dizaines 6 unités (ni l'aspect positionnel, ni l'aspect décimal ne sont travaillés) ;
— 6 unités 5 dizaines (qui met en jeu l'aspect positionnel) ;
— 4 dizaines 16 unités (qui met en jeu l'aspect décimal) ;
— 16 unités 4 dizaines (qui met en jeu l'aspect positionnel et l'aspect décimal).

Ce travail est d'abord fait avec des collections organisées manipulables (cf. le matériel de numération, chapitre 4), puis les collections servent uniquement à valider la réponse.

Décomposition(s) et numération(s)

Plusieurs décompositions sont envisageables. La question est celle de la désignation utilisée pour les faire : le nom du nombre ou son écriture chiffrée ? Par exemple, il est plus facile de décomposer « 56 » en dizaines et unités pour celui qui a compris ce que signifiaient les chiffres (il a immédiatement la réponse « 5 dizaines 6 unités ») qu'en utilisant son nom « cinquante-six », puisque le nombre de dizaines n'est pas directement signifié.

La décomposition précédente est celle engageant un maximum de dizaines, d'autres sont possibles comme 4 dizaines et 16 unités. Mais il existe aussi d'autres formes de décomposition. Par exemple, celle nécessitant un appui sur le nombre entier de dizaines inférieur le plus proche : 56 en 50 + 6. Cette fois-ci, le nom du nombre peut permettre de trouver plus facilement la réponse (puisqu'on entend « cinquante » dans « cinquante-six »), excepté pour des cas comme 72.

Lors de la demande d'une décomposition de type 56 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 6, la question de la procédure est plus difficile à traiter. Les élèves peuvent utiliser le nom du nombre et la comptine des dizaines (dix, vingt, trente, quarante, cinquante), en levant les doigts, avec appui ou non sur le matériel de numération. Ils peuvent aussi utiliser ce que signifient les chiffres : 5 dizaines 6 unités, les 5 dizaines étant rendues visibles via l'écriture 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Ceci pose cependant alors la question du sens du signe « + » pour les élèves et finalement de l'objectif poursuivi en demandant ce type de décomposition.

Quatre-vingt-dix-neuf ou cent, 99 ou 100 et au-delà ?

Dans la comptine numérique, à partir de « quatre-vingts », on utilise la grande comptine de « un à dix-neuf » pour atteindre cent : en classe, on peut donc prononcer le mot « cent » à ce moment.

L'écriture chiffrée « 100 » est introduite au CP, elle correspond à 10 dizaines 0 unité (« 10 » accolé à « 0 »). Son introduction permet de faire le lien entre centimètre et mètre, deux unités de longueur introduites au CP. Il est envisageable dès le CP d'écrire des nombres à trois chiffres, compris comme le codage d'une collection organisée en un nombre maximum de dizaines et d'unités restantes (12 dizaines et 3 unités s'écrit « 123 », « 12 » accolé à « 3 »), mais cela n'est pas une nécessité.

Focus | Une séquence d'apprentissage sur la numération écrite chiffrée

Objectif de la séquence pour l'élève : être capable de comparer des nombres en utilisant les écritures chiffrées

Extrait du *Programme du cycle 2*, Bulletin officiel n° 31 du 30 juillet 2020[12].

« ***Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer***

– dénombrer, constituer et comparer des collections en les organisant, notamment par des groupements par dizaines, centaines et milliers :

- *désignation du nombre d'éléments de diverses façons : écritures additives ou multiplicatives, écritures en unités de numération, écriture usuelle ;*
- *utilisation de ces diverses désignations pour comparer des collections.*

– comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠, <, > :

- *égalité traduisant l'équivalence de deux désignations du même nombre ;*
- *ordre ;*
- *sens des symboles =, ≠, <, >.*

Nommer, lire, écrire, représenter des nombres entiers

– utiliser des écritures en unités de numération (5d 6u, mais aussi 4d 16u ou 6u 5d pour 56) :

- *unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) ;*
- *valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position).* »

Connaissances et compétences associées

Cette séquence se situe en période 3, après la construction de la numération écrite chiffrée. Elle aborde la question de la comparaison de quantités en utilisant directement la signification des écritures chiffrées des nombres qui indiquent ces quantités. Pour bloquer les procédures passant par le nom des nombres (ordre dans la comptine), la séquence est proposée avant que les élèves aient appris en classe la comptine au-delà de soixante, alors que les quantités en jeu excèdent soixante.

12 — https://eduscol.education.fr/pid34139/cycle-2-ecole-elementaire.html

Ce que les élèves ont fait avant

Les élèves savent dénombrer des quantités en utilisant deux types de procédures :

— la procédure « nom du nombre par comptage de dix en dix » (dix, vingt, etc.) a été mobilisée pour les nombres dont les élèves connaissent le nom. À cette époque de l'année, de manière intentionnelle, dans cette séquence, elle n'est pas mobilisable pour tous les élèves, puisque les quantités en jeu y excèdent soixante ;
— la procédure « écriture chiffrée » a été mobilisée pour les nombres dont les élèves connaissent l'écriture chiffrée, sans nécessairement en connaître le nom. C'est cette **procédure** qui est attendue et s'avère la plus efficace pour tous.

Ce que les élèves pourront faire ensuite

— Comparer, intercaler et ordonner des nombres grâce à leur écriture chiffrée : la justification des **procédures** de comparaison de nombres à l'aide des chiffres qui composent leur écriture vient des manipulations qui auront été réalisées durant cette séquence sur les quantités.
— Additionner en colonnes (chapitre 2), en s'appuyant sur un problème de réunion de collections. La justification de la technique viendra des manipulations qui auront été faites.

SÉANCE 1

OBJECTIF DE LA SÉANCE

Les élèves doivent comprendre comment comparer deux nombres grâce à leur écriture chiffrée. Ils doivent utiliser la signification des chiffres selon leur position, aspect décimal et aspect positionnel. Pour atteindre cet objectif, ils auront à comparer deux quantités qu'ils ne peuvent voir simultanément, ce qui motivera l'intérêt de solliciter les écritures chiffrées pour communiquer une information sur ces quantités. La séance 1 se termine par la trace écrite ci-dessous (figure 6) qui met en valeur la comparaison du nombre de dizaines et d'unités dans chaque collection.

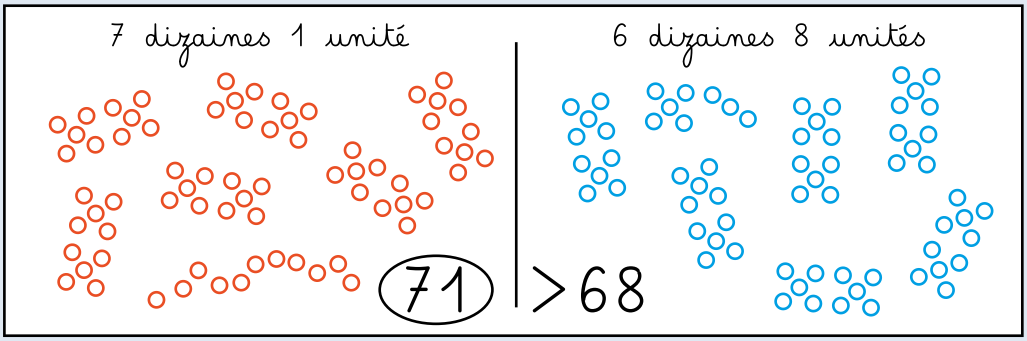


Figure 6. Exemple de la production collective à la fin de la séance 1 « Comparer des nombres », qui pourrait être verbalisée ainsi : « *Tu peux comparer les nombres grâce à leur écriture chiffrée. 71 est plus grand que 68, car dans 71 il y a 7 dizaines alors que dans 68 il y a seulement 6 dizaines.* »

Remarque : intentionnellement, on ne se réfère pas à leur ordre d'arrivée dans la frise ou comptine numérique. L'objectif est de réinvestir la signification des chiffres dans les écritures chiffrées. On vise tout d'abord ici la compréhension d'une procédure avant de recourir à une automatisation ultérieure[13].

DÉROULEMENT

- **Étape 1 : écrire le nombre de ronds qui sont sur sa feuille**

Le professeur partage sa classe en deux groupes d'élèves distincts. Les premiers reçoivent chacun une feuille avec une même collection de ronds rouges, les seconds chacun une autre feuille avec une même collection de ronds bleus (différente de la collection de ronds rouges).

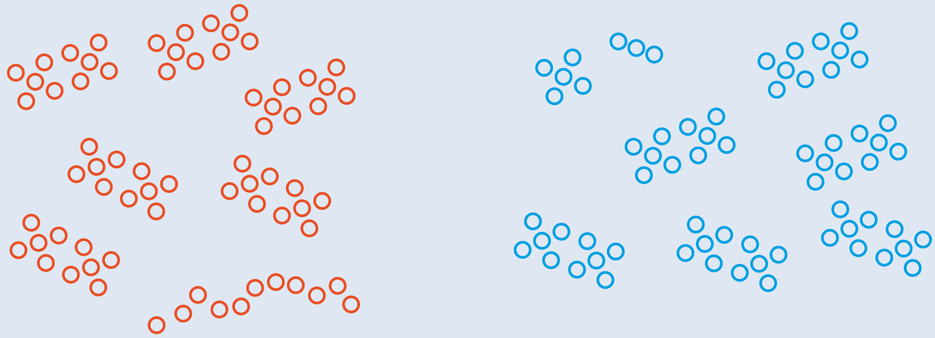


Figure 7. Les deux collections à comparer.

Les élèves ayant la collection de ronds rouges ne doivent pas voir la feuille avec la collection de ronds bleus, et réciproquement. Cela permet de motiver l'enjeu de cette étape 1 : solliciter les écritures chiffrées pour communiquer une information sur ces quantités. Le problème posé aux élèves est de savoir sur quelle feuille il y a le plus de ronds. Les élèves sont amenés à trouver la solution pour communiquer le nombre de ronds : l'écrire avec des chiffres. Chaque élève doit alors écrire avec des chiffres le nombre qui indique la quantité de ronds dessinés sur sa feuille.

Remarque : la procédure attendue commence nécessairement par une prise en compte des dizaines. Les deux collections ne présentent pas les mêmes difficultés pour cette prise en compte de dizaines. Ces éventuelles difficultés peuvent être traitées de manière individuelle puisque les élèves ne voient que la collection de leur couleur : pour les élèves qui en ont encore besoin, cela permet de revenir sur la signification des chiffres dans les écritures chiffrées. Les spécificités des deux collections sont abordées collectivement dans le bilan d'étape qui suit.

Bilan d'étape : mise en commun de certaines procédures en vue du rappel du savoir à l'œuvre.

Chaque collection est affichée et étudiée l'une après l'autre : elles ne doivent pas être visibles simultanément. À la fin de ce bilan d'étape ne resteront au tableau que les écritures chiffrées du nombre de jetons de chaque collection et la formulation en termes de dizaines et unités.

13 — Voir Denis Butlen, Monique Charles-Pézard, « Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique », revue *Grand N*, n° 79, p. 7-32, 2007 (cf. bibliographie p. 152).

Trois procédures sont étudiées collectivement pour obtenir les écritures chiffrées demandées :

— La procédure « nom du nombre par comptage un en un » est disqualifiée car jugée trop longue et peu sûre au regard des autres procédures, d'autant que la comptine au-delà de « soixante » n'a pas encore été enseignée.
— La procédure « nom du nombre par comptage de dix en dix » (dix, vingt, trente, etc.) pourrait être utilisée mais encore faut-il bien connaître la comptine. Elle permet d'obtenir le nom du nombre mais il reste à l'écrire. Ceci permet de voir les avantages de l'autre procédure.
— La procédure « écriture chiffrée » est valorisée ici car accessible à tous. L'organisation en un maximum de dizaines et le comptage des dizaines (une dizaine, deux dizaines,… , sept dizaines) puis des unités restantes permet d'obtenir directement l'écriture chiffrée du nombre et ainsi d'indiquer la quantité. Elle mobilise les aspects décimal et positionnel qui seront utilisés pour la comparaison demandée ultérieurement (étape 2).

Le professeur valide les écritures sans afficher les collections mais simplement en verbalisant le nombre de dizaines et d'unités : « 7 dizaines 1 unité et 6 dizaines 8 unités ».

- **Étape 2 : comparer les deux quantités en comparant les nombres écrits au tableau**

À partir de ce qui est maintenant au tableau, le professeur demande aux élèves d'écrire sur leur ardoise le nombre le plus grand : il montre 71 en disant « *sept dizaines et une unité* », et il montre 68 en disant « *six dizaines et huit unités* ». Le nom des nombres n'est pas prononcé. Selon les élèves, il est possible de proposer de vérifier la réponse avec leur matériel de numération.

La démarche attendue et valorisée dans la mise en commun est la compréhension de la signification des chiffres dans la numération écrite chiffrée : 71 c'est 7 dizaines et une unité, il y a plus de 7 dizaines ; 68 c'est 6 dizaines et 8 unités, il y a donc moins de 7 dizaines.

Lors de la mise en commun, une fois les réponses répertoriées et les arguments donnés pour les justifier, la validation se fait en affichant les deux collections.

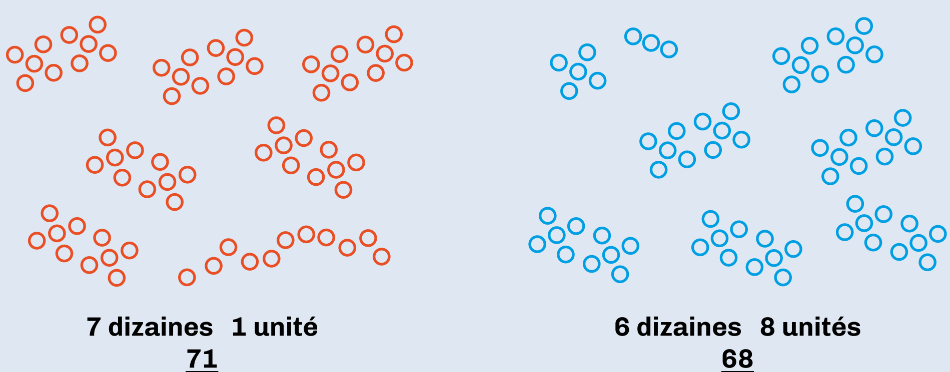


Figure 8. Affichage des deux collections lors de la mise en commun.

L'utilisation au tableau d'un matériel de numération aimanté, sécable et assemblable permet une validation matérielle à l'aide d'associations dizaine/dizaine et unité/unité.

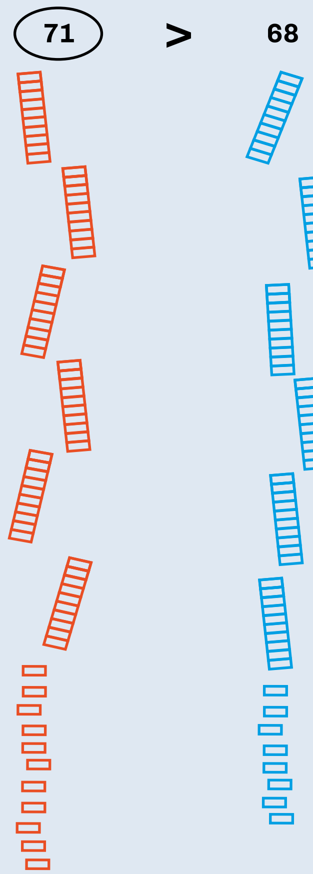


Figure 9. Validation à l'aide d'un matériel de numération aimanté au tableau.

FORMALISATION DU SAVOIR À PARTIR DE LA MISE EN COMMUN (INSTITUTIONNALISATION)

La mise en commun permet d'obtenir la formalisation du savoir visé. Si les symboles « < » et « > » n'ont pas été préalablement introduits, c'est l'occasion de le faire. On pourra cependant veiller à ce que l'élève entoure le nombre le plus grand pour indiquer sa réponse.

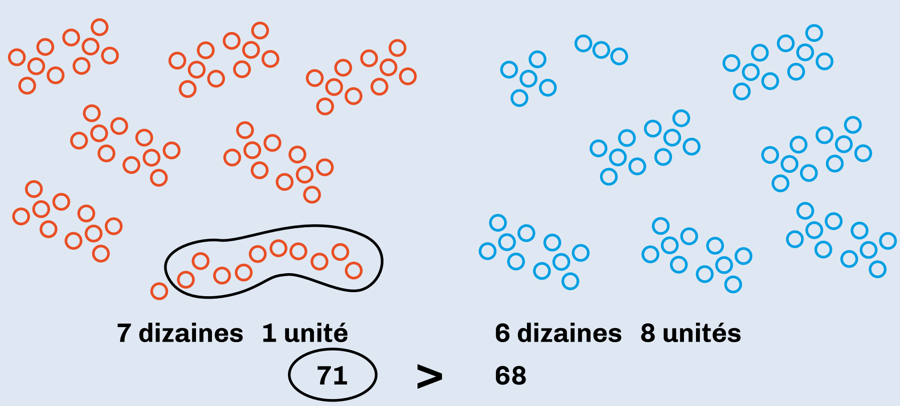


Figure 10. Exemple de présentation au tableau.

Le savoir à retenir peut se construire sous forme d'un affichage collectif réalisé à partir de la verbalisation des élèves :

« Tu peux comparer les nombres grâce à leur écriture chiffrée. 71 est plus grand que 68, car dans 71, il y a 7 dizaines alors que dans 68, il y a seulement 6 dizaines. »

SÉANCE 2

OBJECTIF DE LA SÉANCE

Les élèves réinvestissent le savoir formalisé pour comparer deux nombres dans des contextes divers.

Le jeu sur les variables (les nombres et leurs expressions, la disponibilité du matériel de numération) permet d'organiser une différenciation des apprentissages. Les nombres dans l'énoncé peuvent être lus en utilisant une formulation en unités de numération (6 dizaines et 8 unités pour « 68 »).

- **Exemple d'exercice dans un contexte « nombre » :**

À chaque fois, entoure le nombre le plus grand et écris ensuite le symbole qui convient : =, < ou >. Tu peux, si tu le veux, vérifier tes réponses avec le matériel de numération.

78 85	91 78	47 74	9 41
70 7	5d 1u 4d 2u	3u 4d 34	5d 17u 6d

- **Exemple d'exercice avec un autre contexte :**

68 élèves doivent partir au cinéma. Le car arrive, il peut transporter 75 élèves. Tous les élèves pourront-ils être transportés ? Explique pourquoi.

SÉANCES SUIVANTES

OBJECTIF

L'objectif est que les élèves réinvestissent dans des contextes divers le savoir formalisé dans le champ numérique des nombres de 0 à 100 : pour ordonner trois nombres, puis pour comparer, intercaler ou ordonner des nombres.

Il s'agit de faire verbaliser les élèves sur leur raisonnement (comme dans la formalisation de la séance 1) et non pas d'utiliser des règles sans qu'ils ne les comprennent, de type « on compare le chiffre des dizaines du premier nombre avec celui des dizaines du second nombre ». Par exemple, s'il s'agit de comparer 9 et 45, on peut mettre en valeur que le premier nombre est inférieur à une dizaine, alors que le second est supérieur à 4 dizaines.

On pourra proposer des exercices en s'inspirant de ceux des séances précédentes :

— en jouant sur les **variables didactiques** : taille des nombres, type de représentation ou de désignation (à l'aide de leur écriture chiffrée ou d'unités de numération, ou encore de collections manipulables ou non, selon différents types d'organisation) ;
— en diversifiant les contextes : par le jeu (voir chapitre 5).

DIFFÉRENCIATION

Les élèves qui en ont encore besoin peuvent utiliser le matériel dont ils disposent pour vérifier leur réponse. Des exercices supplémentaires peuvent être proposés aux élèves les plus rapides en jouant sur les variables didactiques et sur la variété des contextes.

En résumé

- Il existe **deux systèmes de numération** dont il convient d'enseigner les principes propres à chacun. Les mots et les chiffres sont les signes constitutifs de chacun d'entre eux. La forme écrite de l'oral « quarante-deux » n'est pas l'écriture chiffrée « 42 ».

- **Deux grands types d'itinéraires** permettent d'enseigner les systèmes. En amont, la dizaine est à concevoir comme synonyme de « dix » et comme nouvelle unité de numération. **Deux procédures de dénombrement sont à enseigner de manière explicite :** l'une permet d'obtenir le nom du nombre sans nécessité de connaître son écriture chiffrée, l'autre permet d'obtenir l'écriture chiffrée du nombre sans nécessité de connaître son nom.

- **Les unités de numération** servent à désigner des quantités et permettent de travailler **l'aspect décimal et l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée**.

- Les comparaisons de collections peuvent servir d'appui à la construction des deux systèmes de numération. Les connaissances sont réutilisées dans diverses activités : représenter, comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres ; calculer. **Un « dialogue » peut s'instaurer entre des procédures** utilisant les ressources de l'un ou de l'autre système.

II

Calcul et sens des opérations

Le calcul pris dans une vision large est omniprésent dans les mathématiques, il en est une composante essentielle, inséparable du raisonnement.

L'ambition majeure de l'enseignement du calcul à l'école doit être le développement aisé de sa pratique, s'appuyant sur la mémorisation de faits numériques et l'apprentissage de procédures et d'algorithmes. Cela suppose d'enseigner, dès le CP, les diverses formes du calcul (en particulier mental, en ligne, posé) en les faisant interagir sans cloisonner leur enseignement.

Quelles formes et modalités de calcul enseigner au CP ?

Les différentes formes de calcul pour le cycle 2 sont définies dans le tableau ci-dessous[14]. Le **calcul instrumenté** sera introduit en cycle 3.

CALCUL MENTAL	CALCUL EN LIGNE	CALCUL POSÉ
Modalité de calcul sans recours à l'écrit.	Modalité de calcul écrit ou partiellement écrit sans utilisation des algorithmes d'opérations posées.	Modalité de calcul écrit qui requiert l'application d'un algorithme opératoire.

Le **calcul mental** mobilise le plus souvent la numération orale[15], le **calcul en ligne** peut s'appuyer sur les deux systèmes de numération décrits dans le chapitre 1 (numérations orale et écrite chiffrée) et le **calcul posé** va se référer à la numération écrite chiffrée.

14 — Le calcul aux cycles 2 et 3 : https://eduscol.education.fr/cid102696/ressources-pour-les-mathematiques-cycle-2.html

15 — Remarquons que le fait de poser mentalement une opération ne relève pas du calcul mental mais du calcul posé.

La conférence de consensus sur les nombres et le calcul[16] (Cnesco, 2015) recommande de développer en premier lieu les compétences en calcul mental, en calcul en ligne et de leur consacrer une place prépondérante dans les apprentissages. Le calcul posé pour les additions, sera introduit au plus tard en période 4 du CP. Si les élèves peuvent calculer en ligne la plupart des sommes qui relèvent du domaine numérique du CP, l'apprentissage d'un algorithme de calcul posé se révélera très utile les années suivantes.

Ces modalités de calcul mobilisent à un moment donné :

— **des faits numériques**, c'est-à-dire des résultats de calculs mémorisés qui sont immédiatement disponibles.
    - **Exemples pour le CP :** compléments à 10, doubles et moitiés, résultats des tables d'addition, etc.

— **des procédures élémentaires automatisées**, c'est-à-dire des traitements de calculs qui s'appuient sur des faits numériques mémorisés et mettent en jeu certaines propriétés des nombres et des opérations. Ces traitements sont effectués immédiatement ou très rapidement.
    - **Exemples pour le CP :** + 1, – 1, + 10, – 10, 20 + 7, 34 + 8, décomposer un nombre (24 = 20 + 4 ou 2 dizaines et 4 unités), commuter les termes d'une addition, calculer un presque-double, etc.

— **des combinaisons de procédures**, c'est-à-dire des traitements de calculs qui s'appuient sur des faits numériques et sur la mobilisation de plusieurs procédures élémentaires.
    - **Exemples pour la fin du CP :** 7 + 43. Un traitement possible pour ce calcul consiste à mobiliser un fait numérique, 7 + 3 = 10 (complément à 10), les procédures élémentaires automatisées de décompositions additives des nombres (43 = 40 + 3) et la commutativité pour arriver au traitement du calcul suivant[17] : 7 + 43 = 7 + 40 + 3 = 7 + 3 + 40 = 10 + 40.

Une fois introduites, toutes ces modalités seront complémentaires pour développer chez les élèves des habiletés calculatoires (disponibilité des faits numériques, procédures élémentaires automatisées) et des compétences relatives à la résolution de problèmes (combinaisons de procédures, capacités d'initiative, etc.). La proposition de programmation figurant à la fin de ce guide précise les repères de progression tout au long de l'année du CP.

16 — On trouvera les recommandations issues de cette conférence sur le site du Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) : http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Recommandations-du-jury.pdf

17 — Cette écriture est ici pour le professeur mais n'est pas attendue des élèves de CP. Ceux-ci pourront proposer d'autres écritures, par exemple avec plusieurs égalités ou l'utilisation d'un arbre de calcul.

Comment passer du comptage au calcul ?

Un des enjeux du CP est de passer des procédures de comptage aux procédures de calcul, en prenant appui sur les apprentissages de maternelle.

À l'école maternelle, il n'y a pas de compétence de calcul explicitement formulée dans les programmes, mais des compétences relatives à la construction du nombre[18] qui sont des acquisitions clés pour l'apprentissage du calcul au cycle 2. Parmi celles-ci, on trouve :

— résoudre des problèmes dans lesquels il faut chercher le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou le nombre atteint à la suite d'un déplacement sur une piste numérotée ;
— connaître le nom des nombres et l'écriture chiffrée des premiers nombres et avoir la capacité de passer rapidement de ces symboles (oraux et écrits) à la quantité correspondante sous différentes formes ;
— composer / décomposer les nombres jusqu'à 10, ce qui représente une première étape vers la mémorisation des tables d'addition.

« *Les pratiques régulières et variées de composition/décomposition de petites collections doivent être favorisées car elles permettent de donner du sens aux nombres et d'approcher les notions d'addition et de soustraction.* [...] *Elles développent aussi l'acquisition d'une aisance dans la manipulation et les procédures. Elles favorisent la mémorisation des premiers faits numériques (premiers éléments des tables d'additions et de soustractions et en particulier la liste des compléments à 10) et l'acquisition de techniques de calcul.* »

Extrait de la conférence de consensus : « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire », 2015, accessible sur le site du Cnesco, p. 13.

Ainsi, à l'école maternelle, les élèves ont déjà été confrontés à des problèmes additifs ou soustractifs et ont compris qu'il était possible de prévoir la quantité d'objets obtenus puis de l'exprimer par un seul nombre.

Les situations d'apprentissage proposées sont alors vécues par les élèves : ils manipulent pour trouver une solution, ils verbalisent leurs procédures et vérifient empiriquement, à l'aide du matériel, leurs solutions. L'enjeu du CP est de faire passer les élèves de procédures de comptage sur les objets à des procédures de calcul. La situation de la boîte est une situation de référence pour enseigner ce passage du comptage au calcul dès la première période du CP.

18 — https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Evaluations_2019-2020/00/4/EvalAide_CSEN_Definitif_Mai2019_1165004.pdf

LA SITUATION DE LA BOÎTE : UNE SITUATION DE RÉFÉRENCE DU CHAMP ADDITIF AU CP

Le professeur dispose d'une boîte opaque avec un couvercle et de jetons identiques. Les élèves ne peuvent pas voir le contenu de la boîte. Le professeur place par exemple 4 jetons dans la boîte puis en ajoute 3 autres en montrant chaque fois les quantités de jetons qui y sont placés et en les verbalisant : « *Je mets quatre jetons dans la boîte et encore trois jetons. À vous de trouver combien il y a de jetons dans la boîte. Nous vérifierons ensuite vos réponses en ouvrant la boîte.* »

Le fait que la boîte soit opaque et manipulée par le professeur contraint l'élève à **anticiper ce que devient la quantité lorsqu'elle subit une augmentation**. Il ne peut en effet pas « lire » la solution sur le matériel. Il doit donc imaginer un moyen de trouver cette solution en utilisant ses connaissances. Pour cela, il peut mobiliser différentes procédures (cf. l'introduction de ce guide) :

- Des procédures de dénombrement élémentaire (relevant du comptage de un en un) :
  - utiliser du matériel et simuler l'action (il prend 4 cubes puis 3 cubes, les réunit et dénombre) ;
  - dessiner les jetons (ou barres, constellations du dé, etc.) et les dénombrer ;
  - compter sur les doigts : 1...4 sur une main puis 1...3 sur l'autre et recompter les doigts levés.
- Des procédures de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques (relevant du décomptage, surcomptage, etc.) :
  - surcompter avec les doigts : mettre 4 dans sa tête et faire 5, 6, 7 sur une main ;
  - surcompter à l'aide de la frise numérique : l'élève met un doigt sur 4 et compte 1, 2, 3 en déplaçant son doigt sur la bande pour lire 7.
- Des procédures relevant du calcul :
  - se dire qu'ajouter trois jetons à quatre jetons, c'est ajouter d'abord un jeton (ce qui fait cinq), et encore un (ce qui fait six) et encore un, ce qui fait sept ;
  - utiliser un résultat mémorisé : « je sais que quatre et trois, c'est égal à sept ».

Dans cette situation, le rôle de la manipulation est central et devra évoluer. Dans une phase préalable, les élèves s'approprient le matériel en manipulant eux-mêmes la boîte et les jetons. La situation s'articule ensuite en trois temps pour faire évoluer les procédures des élèves (cf. figure 11, p. suivante).

Dans un temps 1, le professeur manipule la boîte et les jetons, l'élève n'y a pas accès. En revanche, il peut disposer de différents outils (jetons, cubes, constellations de dés, feuilles pour dessiner, frise numérique, etc.) pour l'aider à anticiper la quantité finale de jetons.

Dans un temps 2, les outils à disposition sont limités. Par exemple, ne disposant plus de matériel physique, les élèves peuvent alors mobiliser les procédures de dénombrement utilisant la schématisation (représentation des jetons sur une feuille), la frise numérique ou encore les doigts.

Dans un temps 3, la situation est proposée sans possibilité d'utiliser le passage à l'écrit ou la frise numérique. Les procédures de calcul sont alors l'outil le plus rapide et efficace pour anticiper la situation finale et résoudre le problème.

Appropriation	*Temps 1*	*Temps 2*	*Temps 3*
Matériel disponible et jetons visibles.	**Blocage de la manipulation, utilisation d'outils.**	**Blocage de la manipulation, limitation des outils.**	**Absence de manipulation et d'outils.**
Procédures de dénombrement élémentaire.	Procédures de dénombrement élémentaire.	Procédures de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques.	Procédures relevant du calcul.

Le retour au matériel permet la validation des procédures.

Processus d'ABSTRACTION

Figure 11. Schéma des différents temps de la situation de la boîte.

Le rôle de la manipulation est articulé avec celui de la verbalisation qui permet à l'élève de décrire et expliquer sa procédure (« *j'ai mis quatre dans ma tête et avec mes doigts j'ai fait cinq, six, sept* »), puis de la validation de la solution (par dénombrement des jetons, par vérification sur la table d'addition, etc.). Cette verbalisation doit souvent être provoquée par le professeur en posant explicitement des questions : Comment le sais-tu ? Comment es-tu sûr de ta solution ? Comment peux-tu vérifier ?

Le codage mathématique ($4 + 3 = 7$ dans l'exemple précédent) sera introduit par le professeur suite aux différents temps de la résolution du problème, dans un moment de bilan.

En termes de progression sur les nombres, cette situation de la boîte, déjà vécue en grande section de maternelle, est proposée d'abord avec des nombres allant au moins jusqu'à 10 en période 1, puis au moins jusqu'à 20 en période 2. En termes de progression sur les types de problèmes, la situation de la boîte est proposée dès le début de CP dans des situations d'ajout et de retrait de jetons, avec recherche de la quantité finale. Ensuite, elle évoluera vers des problèmes parties-tout avec recherche d'une partie (chapitres 3 et 5).

Quelles opérations enseigner au CP ?

Le rapport *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques* de février 2018, rédigé par Cédric Villani et Charles Torossian, comme ceux de l'Académie des sciences en 2007 et le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) en 2015, engagent les professeurs à développer l'acquisition du sens des quatre opérations dès le CP[19]. Il ne s'agit pas d'enseigner prématurément les opérations posées mais bien de confronter les élèves à des situations qui donnent du sens aux quatre opérations et permettent de les conceptualiser : addition et soustraction seront associées dans le champ additif, multiplication et division dans le champ multiplicatif.

L'addition et la soustraction

Les problèmes additifs et soustractifs relèvent du même champ conceptuel – celui des structures additives (ou champ additif) – et il n'y a pas lieu de les séparer au niveau des apprentissages du CP. Ces savoirs se construisent en interaction les uns avec les autres :

— **L'addition et la soustraction comme opérations mathématiques** sont abordées dès la maternelle sans aucun formalisme (cf. la situation de la boîte, p. 53).

— **La symbolisation de l'addition et de la soustraction :**

  – l'apparition des symboles mathématiques « + » et « – » et des écritures type 4 + 5 = 9 ou 7 – 4 = 3, relève du CP. Les opérations mathématiques, addition et soustraction, sont introduites simultanément via la résolution de problèmes, les écritures symboliques « + » et « – » sont introduites dans un temps assez proche. Pour mieux comprendre le signe « + », il lui faut une alternative ; les deux signes « + » et « – » se mettront alors en valeur réciproquement. L'élève donnera plus de sens à une écriture donnée si ce n'est pas la seule mobilisable. Le signe « – » permettra de disposer d'une écriture dans certains contextes où elle complétera l'écriture additive (recherche de la quantité finale après une perte, recherche de la case de départ sur la piste des nombres après un déplacement, recherche d'une partie d'un tout, etc.). Lors de l'apprentissage des tables d'addition, la soustraction est une autre écriture possible à partir d'un triptyque de nombres : connaître les tables d'addition, c'est aussi connaître les différences associées (cf. focus « L'apprentissage des tables d'addition », p. 60). Par exemple, le complément à 10 de 3 pourra être interrogé et entraîné par l'addition à trou 3 + ? = 10 mais aussi par la différence associée 10 – 3 = ?

19 — En grande section, les enfants ont abordé des situations additives mais aussi multiplicatives comme : partager 6 bonbons entre 3 enfants, remplir 4 seaux avec 2 cubes chacun.

- l'apparition du signe « = » relève lui aussi du CP. Souvent, il n'est compris que comme l'annonce du résultat d'un calcul : dans 5 + 3 = 8, 8 est le résultat de 5 + 3. Or, au sens mathématique, cette égalité exprime aussi que 5 + 3 et 8 sont deux représentations différentes d'un même nombre. Le travail sur des égalités qui s'élargissent à des sommes de plusieurs termes, favorisera une bonne conception du signe « = ». La vigilance du professeur pourra porter sur :
    - l'utilisation du signe « = » dans les deux sens : 5 + 3 = 8 mais aussi 8 = 5 + 3 ;
    - l'utilisation de sommes de plus de deux termes, 4 + 2 + 2 = 8, associées à des quantités d'objets composées et recomposées ;
    - l'utilisation correcte, pour le professeur comme pour l'élève, du signe « = », en ne l'utilisant pas comme un marqueur d'étape comme dans cet exemple, « 15 + 8 = 15 + 5 = 20 + 3 = 23 », qui est mathématiquement incorrect.

— **L'algorithme opératoire** de l'addition relève du CP (cf. le paragraphe ci-contre, intitulé « Comment enseigner le calcul mental et le calcul en ligne au CP ? ») alors que celui de la soustraction relève du CE1.

La multiplication et la division

Il est possible et recommandé d'encourager l'apprentissage du sens de la multiplication et de la division dès le CP et de travailler les aspects les plus élémentaires de ces opérations mathématiques.

En effet, les élèves rencontrent dès la maternelle des situations de partage équitable ou de produit, qui leur sont parfaitement naturelles. Celles-ci apparaissent d'ailleurs de manière implicite lors de l'apprentissage des faits numériques comme les doubles (la multiplication par 2), les moitiés (la division par 2) et plus généralement les **nombres rectangles**[20]. Confronter très tôt l'élève à l'existence de relations multiplicatives sur ces nombres permet d'appréhender naturellement les problèmes multiplicatifs et de donner un sens plus géométrique – donc plus naturel – à cette opération[21]. Ainsi, manipuler des configurations rectangles (des « tablettes de chocolat », par exemple) permet de travailler le partage des nombres entiers mais aussi de visualiser la commutativité de la multiplication.

En CP, l'approche de ces opérations débute par un travail manipulatoire sur des objets comme le proposent les problèmes suivants :

20 — Produits d'entiers strictement plus grands que 1, comme 6 = 2 x 3, 10 = 2 x 5, 12 = 3 x 4, 15 = 3 x 5, etc.
21 — C'est mathématiquement une approche (géométrique) de dimension 2 des nombres en lien avec les surfaces.

- Problème 1 : « *On remplit 4 sacs avec 5 pommes chacun. Combien faut-il de pommes ?* »
- Problème 2 : « *Trois enfants se partagent une tablette de chocolat de 12 carreaux. Combien de carreaux de chocolat aura chaque enfant ?* »
- Problème 3 : « *Il y a 18 élèves dans la classe. Pour participer à une rencontre sportive, le professeur constitue des équipes de 3 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* »

La symbolisation et l'apparition du symbole mathématique « x » peuvent être proposées en fin de CP à partir des doubles ou des décompositions additives, **mais ne sont pas un attendu de fin de CP**. C'est la verbalisation et l'usage du mot « fois » qui introduira le signe mathématique : 2 fois 5 peut s'écrire 2 x 5 en langage mathématique, et de la même manière, 45, c'est 4 fois 10 plus 5. L'introduction du signe « : » est quant à lui prématuré à ce niveau de classe.

Les algorithmes opératoires de ces opérations ne relèvent pas du CP. L'apprentissage de l'algorithme de la multiplication se fait en CE2 et celui de la division en CM1.

Comment enseigner le calcul mental et le calcul en ligne au CP ?

Un enseignement structuré et une pratique régulière et répétée du calcul mental et du calcul en ligne va permettre de donner du sens aux propriétés opératoires et aux techniques de décomposition des nombres. C'est un travail conjoint, entre sens et technique, qui permettra à l'élève de construire un répertoire, une sorte de boîte à outils, disponible ensuite pour d'autres apprentissages (par exemple pour le calcul posé).

La mémorisation des faits numériques

Les faits numériques sont les résultats de calculs mémorisés disponibles immédiatement. Les recherches sont unanimes sur l'importance de la mémorisation des faits numériques pour l'apprentissage du calcul. En effet, ces derniers jouent un rôle important dans la mesure où ils soulagent la mémoire de travail. Il a été montré que la faiblesse ou l'absence de faits numériques accessibles influent négativement sur les apprentissages ultérieurs. Il est donc indispensable d'enseigner les faits numériques, d'aider les élèves à les mémoriser en explorant leurs régularités et d'en découvrir la beauté à travers le jeu. Les faits numériques à mémoriser au CP[22] sont rappelés dans le tableau suivant.

22 — BOEN n° 22 du 29 mai 2019, annexes 2 et 20, note de service n° 2019-072 du 28 mai 2019.

FAITS NUMÉRIQUES	EXEMPLES
COMPLÉMENTS à 10	Combien faut-il ajouter à 7 pour avoir 10 ? 7 + ... = 10
DOUBLES des nombres ≤ 10, ainsi que des dizaines entières (jusqu'à 50)	7 + 7 = ? 20 + 20 = ? Quel est le double de 7 ? de 20 ?
MOITIÉS des nombres pairs ≤ 20	Quelle est la moitié de 18 ?
LES DÉCOMPOSITIONS ADDITIVES des nombres ≤ 10	Donner 5 décompositions de 9
TABLES D'ADDITION des nombres ≤ 10	6 + 3 = ? 3 + ... = 9 9 – 3 = ?

Certains élèves mémorisent facilement ces faits numériques alors que d'autres ont besoin d'un entraînement plus long pour y arriver. S'il est indispensable, l'entraînement n'est pas le seul ressort de la mémorisation. Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l'autre facette de l'apprentissage, tout aussi nécessaire à la mémorisation. En prenant appui sur les résultats connus, en développant la capacité des élèves à retrouver certains calculs et en proposant au bon moment des outils (matériel de numération, frise numérique, etc., cf. chapitre 4) ainsi que de nombreux entraînements (en collectif ou en groupes de besoin, dans le cadre de jeux ou d'entraînements spécifiques), le professeur va pouvoir atteindre de manière efficace cet objectif de mémorisation.

Par exemple, pour exercer la mémorisation des compléments à 10, l'enseignant pourra proposer différentes modalités d'entraînements à travers le jeu ou des ressources numériques (cf. chapitre 5). Il pourra aussi donner à ses élèves des calculs directs avec des consignes variées :

— « *Complète 3 pour faire 10.* »
— « *Combien manque-t-il à 3 pour faire 10 ?* »
— « *Que faut-il ajouter à 3 pour faire 10 ?* »

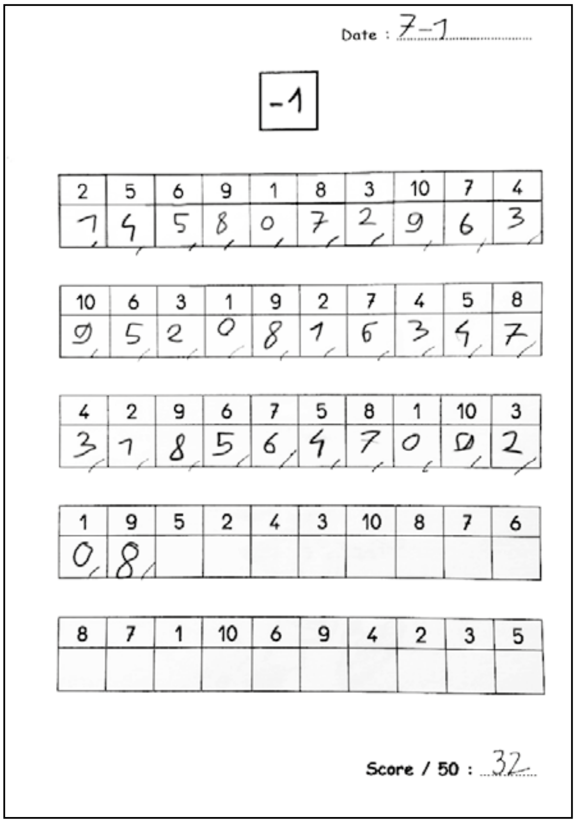


Figure 12. Production d'élève de CP en Rep+.

Une mémorisation solide des faits numériques et des procédures élémentaires est une condition nécessaire pour engager les élèves vers des calculs plus complexes. C'est donc **l'automatisation** de la restitution des faits numériques et procédures élémentaires que l'enseignant doit viser avec le développement chez les élèves de capacités de calcul rapides et précises. Il s'agit ainsi de développer **la fluence en calcul**. Pour cela, des entraînements nombreux et intensifs seront proposés pour augmenter la vitesse de calcul des élèves. Celle-ci pourra par exemple être évaluée par une série de calculs proposée en **temps limité**, dans l'ordre ou dans le désordre (cf. figure 12).

Focus | L'apprentissage des tables d'addition

« La principale difficulté rencontrée est que les élèves apprennent des résultats qui n'ont pas de sens pour eux. L'idée est de proposer une nouvelle démarche d'apprentissage, fondée sur les relations entre les nombres. Cette démarche repose sur un découpage du tableau de Pythagore en différents secteurs qui correspondent à une connaissance ou à une stratégie de calcul. »

Christophe Bolsius, *Fort en calcul mental ! Connaissances et stratégies pour réussir*, p. 27, Scéren, CRDP de Lorraine, 2011.

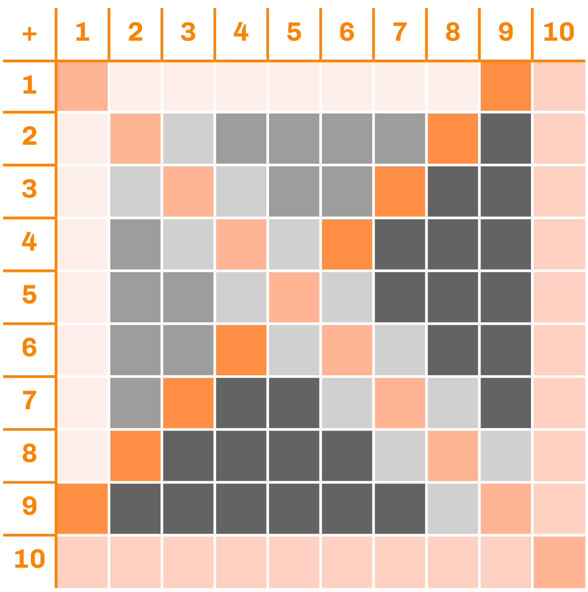


Figure 13. Table d'addition de Pythagore, un outil pour l'enseignant.

Le découpage proposé ci-contre (cf. figure 13) présente l'avantage de faire du lien avec la numération orale, la numération écrite (groupement par 10), le comptage, et permet d'installer, dès le CP, des stratégies de calcul variées (les presque-doubles, les additions à retenues) qu'il faudra entretenir. L'apprentissage des tables d'addition devient le résultat d'un long processus qui repose sur une élaboration progressive des résultats utilisant des points d'appui favorables à la mémorisation.

Le traitement par familles décrites ci-après permet aussi de construire une progressivité des apprentissages qui prend appui sur leur ordre d'introduction, qui va ici du clair vers le foncé (figure 14).

Cette proposition de progression débute par la famille n°1 (les suivants) et se conclut par la famille n° 7 (le passage par le paquet de 10). Les apprentissages des familles (n° 1, 2, 3, 4 et 6) sont indépendants les uns des autres et les familles (n° 5 et 7) sont élaborées à partir des précédentes. Notons la symétrie dans la table de Pythagore qui exprime la commutativité de l'addition et permet de réduire le nombre de faits numériques à retenir.

L'apprentissage de chaque famille s'appuie d'abord sur l'utilisation et la manipulation de supports adaptés (cubes, frise numérique, cartes à points, etc.) qui permettent de construire, à l'aide de la verbalisation, des images mentales. Celles-ci pourront ensuite être évoquées et favoriser ainsi la mémorisation et l'installation du répertoire additif.

FAMILLES	EXEMPLES	FAITS NUMÉRIQUES OU PROCÉDURE ÉLÉMENTAIRE
1. Les suivants	3 + 1 5 + 1	Procédure élémentaire
2. Les règles de numération	10 + 5 10 + 7	Faits numériques
3. Les doubles	2 + 2 3 + 3	Faits numériques
4. Les compléments à 10	2 + 8 4 + 6	Faits numériques
5. Les presque-doubles	4 + 5 6 + 7	Procédure élémentaire
6. Les sommes inférieures à 10	3 + 6 7 + 2	Faits numériques
7. Le passage par 10	7 + 5 6 + 8	Procédure élémentaire

Figure 14. Les différentes familles de calculs.

FAMILLE N° 1. LES SUIVANTS : LES CALCULS EN + 1

Il s'agit dans un premier temps d'expliciter le fait qu'« ajouter un » revient à dire le suivant (« *je connais quatre plus un, c'est celui qui vient après quatre, c'est cinq* »). Le professeur choisira le vocabulaire qui convient aux compétences de ses élèves (après/avant, suivant/précédent ou successeur/prédécesseur). Cet apprentissage s'appuie sur la connaissance de la comptine numérique et relève de la numération orale (cf. chapitre 1). On pourra ensuite étendre cette famille aux calculs en + 2.

FAMILLE N° 2. LES CALCULS EN + 10

Ces calculs additifs prennent appui sur la compréhension des premiers nombres à deux chiffres. Il s'agit de comprendre que « deux plus dix égal douze » s'écrit 2 + 10 = 12. Certaines difficultés des élèves peuvent venir du fait que le nom des nombres de 11 à 16 ne reflète pas leur écriture. Ce sont bien ici des connaissances en numération (orale et écrite) qu'il faut mobiliser.

FAMILLE N° 3. LES DOUBLES

Les doubles sont des faits numériques rappelés de façon plus sûre et plus rapide que les autres résultats. Leur mémorisation présente peu de difficulté et ils seront mobilisés fréquemment dans des calculs plus complexes. On utilisera progressivement les deux expressions « 8 plus 8 » et « 2 fois 8 ».

FAMILLE N° 4. LES COMPLÉMENTS À 10

Comme pour les doubles, il faut installer cette connaissance et l'entraîner tout au long de l'année de CP. Cette organisation en familles implique des choix, comme celui de travailler 5 + 5 = 10 comme un double ou comme un complément à 10 (5 + ? = 10).

FAMILLE N° 5. LES PRESQUE-DOUBLES

Une fois les doubles installés, il est intéressant d'utiliser ces résultats pour calculer les presque-doubles. Le professeur propose par exemple 6 + 5 en calcul mental. En utilisant les connaissances travaillées précédemment, les élèves peuvent proposer les stratégies suivantes : 6 + 5 = 6 + 6 – 1 = 12 – 1 = 11 ou 6 + 5 = 1 + 5 + 5 = 1 + 10 = 11. Le professeur devra valoriser ces deux stratégies (utiles pour des nombres plus grands), les institutionnaliser et les faire vivre dans la classe (cf. focus « Une séquence de calcul », p. 73).

FAMILLE N° 6. LES SOMMES INFÉRIEURES À 10

C'est le comptage ou surcomptage qui va permettre d'installer la mémorisation de ces faits numériques. L'usage du surcomptage, qui repose sur la maîtrise de la suite des nombres et la capacité à la réciter à partir de n'importe quel point de départ, ne sert qu'à installer les procédures qui seront automatisées par la suite.

FAMILLE N° 7. LE PASSAGE PAR 10

La procédure de passage par 10 s'appuie sur la connaissance des compléments à 10 (famille 4), la décomposition additive des nombres inférieurs ou égaux à 10 (famille 6) et les calculs en + 10 (famille 2). Par exemple, le calcul de 8 + 5 s'appuie sur 8 + 2 = 10 et sur 5 = 2 + 3, pour finalement conduire à 10 + 3 = 13. Le fait numérique 8 + 5 = 13, s'il est fréquemment réactivé, peut ensuite lui-même être mémorisé.

L'utilisation de la propriété de **commutativité** permet de réduire de manière significative la quantité de résultats à mémoriser. Toutefois, cette propriété ne peut prendre son sens qu'en situation et n'a pas à être imposée. Cependant, il est important que cette propriété soit enseignée et explicitée ; le professeur pourra dire et faire dire que, dans une addition, on peut changer l'ordre des nombres. Cette propriété devra ensuite être travaillée régulièrement en proposant par exemple des additions au tableau et en demandant leur réécriture sur ardoise dans le sens le plus économique au calcul, c'est-à-dire en mettant en premier le plus grand des deux nombres. Enfin, il faudra que les élèves automatisent l'usage de cette propriété car il s'agit d'une procédure élémentaire qui devra être mobilisable très rapidement.

La présentation sous forme de tableau à double entrée peut s'avérer complexe pour des élèves de CP qui auraient du mal à s'y repérer. Les exemples ci-contre sont des écrits qui peuvent être utilisés au fur et à mesure de la découverte des différentes familles (cf. figures 15, 16 et 17).

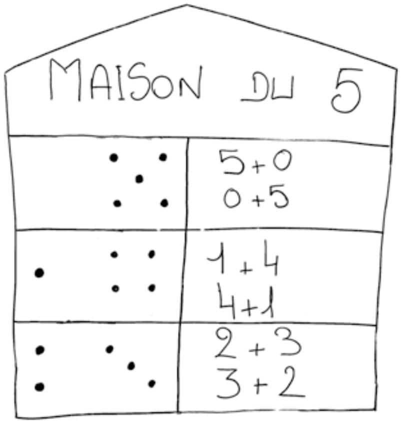


Figure 15. Affichage de la maison du 5.

Table de 5

5 + 0 = 5

5 + 1 = 6

5 + 2 = 7

....

5 + 10 = 15

Figure 16. Affichage de la table d'addition.

+	1	2	3	4	5
1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4	1 + 4 = 5	1 + 5 = 6
2	2 + 1 = 3	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7
3	3 + 1 = 4	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8
4	4 + 1 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9
5	5 + 1 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10

Figure 17. Affichage d'un extrait de la table de Pythagore.

Le calcul en ligne

Le calcul en ligne se distingue du calcul mental par le fait que les résultats intermédiaires ou les décompositions des nombres peuvent être écrits plutôt que stockés en mémoire de travail. Le calcul en ligne est donc une modalité de calcul proche du calcul mental, pour laquelle un écrit vient soutenir la mémoire de travail. Un calcul traité « en ligne » par un élève pourra être mené en « calcul mental » quelques mois ou années plus tard. Grâce à ce recours à l'écrit, l'élève peut traiter des calculs de niveau plus complexe et/ou gérer des nombres de taille plus élevée. Le calcul en ligne incite et entraîne les élèves à développer une souplesse intellectuelle. Il s'agit de construire en même temps la représentation des nombres et leurs possibles décompositions afin que numération et calcul cohabitent. Cette cohabitation donnera accès à une première formalisation des propriétés des opérations, à partir d'exemples numériques, qui seront plus tard installées dans le cadre du calcul algébrique (commutativité, associativité et distributivité de la multiplication sur l'addition essentiellement).

Cette modalité de calcul entraîne la mise en œuvre souvent implicite des propriétés des nombres et des opérations en jeu. Parmi les propriétés des opérations[23], on trouve :

— la commutativité : $5 + 23 = 23 + 5$, qui pourra être verbalisée aux élèves de la manière suivante : « *Dans une addition, on peut changer l'ordre des nombres* » ;
— l'associativité : $23 + (7 + 2) = (23 + 7) + 2$, qui pourra, par exemple, être verbalisée par : « *Dans une addition, on peut associer les nombres de différentes manières* » ;
— l'utilisation simultanée des deux propriétés de commutativité et associativité : $43 + 27 = 40 + 20 + (7 + 3)$;
— la distributivité de la multiplication sur l'addition, propriété plus complexe, sera illustrée par du matériel[24] et explicitée comme dans l'exemple : « *Le double de 21 c'est le double de 20 plus le double de 1* ».

Il convient d'axer le travail en classe sur l'explicitation et la confrontation des procédures possibles et efficaces afin de conduire les élèves à la recherche de procédures finalement moins coûteuses et plus sûres.

Les travaux de Denis Butlen et Monique Charles-Pézard[25] (2007) ont mis en évidence le paradoxe de l'automatisme qui traite des rapports liant automatisme et adaptabilité. Il s'agit d'un défaut d'adaptation des élèves les plus en difficulté qui préfèrent utiliser des procédures sûres de leur point de vue (algorithme posé dans la tête ou décomposition systématique du second terme du calcul) qui fonctionnent dans tous les cas mais s'avèrent coûteuses. C'est en développant davantage d'automatismes sur des procédures élémentaires (ajouter 10, ajouter un nombre entier de dizaines, etc.) que les élèves pourront mobiliser, pour un calcul donné, la procédure la plus économique et ainsi échapper à l'automatisme.

Il est aussi recommandé d'adopter une institutionnalisation qui porte à la fois sur la procédure et son domaine d'efficacité, de manière à montrer que toutes les procédures ne sont pas équivalentes. Cette institutionnalisation doit amener les élèves à prendre conscience de l'éventail et de la hiérarchie des procédures mises en œuvre pour un calcul donné (cf. exemple ci-contre).

De récentes recherches[26] ont montré que le souci de « traiter à égalité » tous les élèves, en particulier en éducation prioritaire, peut conduire les professeurs à prendre en compte toutes les productions, qu'elles soient primitives ou plutôt expertes. Celles-ci sont alors présentées « en vrac », sans hiérarchisation, ce qui est dommageable pour les apprentissages, le repérage des procédures à retenir restant à la charge de l'élève. La phase d'institutionnalisation demeure ainsi trop souvent implicite alors

23 — Les écritures mathématiques illustrant ici les propriétés des opérations s'adressent au professeur et ne sont pas attendues des élèves de CP. Ceux-ci pourront proposer d'autres écritures, par exemple avec l'utilisation de plusieurs égalités ou d'un arbre de calcul.
24 — Ce genre de propriété s'illustre avec des cubes emboîtés sur deux rangées.
25 — *Ibid*, p. 42, note 13.
26 — Voir Denis Butlen, Monique Charles-Pézard, Pascale Masselot, « Apprentissage et inégalités au primaire : le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire », contribution au rapport du Cnesco sur les inégalités scolaires d'origine sociale et ethnoculturelle, 2015.

qu'elle ne peut pas être assurée par tous les élèves. C'est en particulier les élèves en difficulté issus de milieux socialement défavorisés qui ont besoin de ces repères. Cette absence d'explicitation a pour conséquence de renforcer les écarts.

Les activités de calcul en ligne doivent conduire à une institutionnalisation et une structuration des connaissances par des affichages et des traces dans les cahiers des élèves. Sans ce « résumé », les élèves les plus en difficulté peinent à percevoir seuls l'enjeu du calcul ou la justification de la procédure la plus efficace.

EXEMPLE (FIN DE CP) : AJOUTER 9 À UN NOMBRE

Plusieurs procédures sont possibles et sont plus ou moins efficientes selon les nombres en jeu. Le choix de ces nombres par le professeur va permettre aux élèves d'exercer leur habileté en calcul en identifiant la procédure qui sera à la fois la plus efficace et la plus rapide. Ce choix s'appuie sur leurs connaissances des nombres et de leurs propriétés, et sur des faits numériques mobilisables.

- Si le nombre est 20, la procédure la plus efficiente est celle utilisant la connaissance du système de numération orale : vingt plus neuf égal vingt-neuf, qui peut s'écrire 20 + 9 = 29.
- Si le nombre est 21, la procédure la plus efficiente est le complément à la dizaine : 21 + 9 = 20 + (1 + 9) = 30.
- Si le nombre est 26, plusieurs procédures sont possibles :
  - celle du « + 10 – 1 » (si elle est connue des élèves) : 26 + 9 = 26 + 10 – 1 = 35 ;
  - celle reposant sur la décomposition additive et le complément à la dizaine (savoir que le complément à 10 de 6 est 4 et que 9, c'est 4 + 5) : 26 + 9 = 26 + 4 + 5 = 30 + 5 ;
  - celle reposant sur un résultat du répertoire additif (savoir que 6 + 9 = 15) : 26 + 9 = 20 + (6 + 9) = 35.

La plus efficiente est celle du « + 10 – 1 ».

EXEMPLE DE TRACE ÉCRITE

Pour ajouter 9 à un nombre,

- si le nombre se termine par 0, on peut ajouter directement les 9 unités : 20 + 9 = 29 ;
- si le nombre se termine par 1, on peut utiliser le complément à 10 : 31 + 9 = 30 + 1 + 9 = 30 + 10 = 40 ;
- dans les autres cas, on peut faire « + 10 – 1 » : 47 + 9 = 47 + 10 – 1 = 57 – 1 = 56.

Estimation et calcul

« L'amélioration des performances en calcul est corrélée à des progrès dans l'évaluation globale (estimation) du résultat du calcul [...]. *Les élèves* [...] *ne savent pas ou ne comprennent pas ce qu'est une estimation. Ils la définissent souvent comme un « devinement ». Les stratégies utilisées se répartissent en 3 familles : arrondir (rendre le calcul plus facile), traduire sous forme d'une autre opération (somme de 5, 6, 7, 8, 9 → 7 x 5), compenser. Arrondir est la plus fréquente, compenser la plus rare. De manière générale, les élèves préfèrent le calcul exact même si on leur demande une estimation et des différences individuelles fortes existent.* »

Michel Fayol, *L'Acquisition du nombre*, PUF, coll. « Que sais-je », p. 73, 2012.

Dès le CP, les habiletés en calcul peuvent se manifester dans l'estimation de l'ordre de grandeur d'une quantité. Les élèves apprendront après le CP à estimer le résultat d'un calcul soit pour l'anticiper soit pour le contrôler après l'avoir réalisé notamment en résolution de problèmes.

Les premiers exercices de calculs approchés peuvent être centrés sur la détermination du choix d'un ou plusieurs résultats plausibles parmi un ensemble de résultats fournis.

QUEL EST LE NOMBRE LE PLUS PROCHE ?		
17 + 4 = ?	**17 – 5 = ?**	**35 + 27 = ?**
20 30 40	10 20 30	40 50 60

On pourra aussi poser en parallèle des petits problèmes[27] :

— *J'ai 30 € dans mon porte-monnaie, je veux acheter un gâteau à 15 € et un autre à 17 €. Ai-je assez d'argent ou pas ?*
— *Il y a 27 élèves dans notre classe, s'il y avait 5 nouveaux, serions-nous plus de 30 ?*

Ce réflexe de l'estimation, une fois pris, pourra être conservé pour poser l'opération seulement si c'est nécessaire et plus tard prendre la calculatrice uniquement si le calcul est vraiment compliqué.

27 — Voir Daniel Djament, Sylvie Gamo, *Le Calcul mental à l'école élémentaire – Les bases du calcul nécessaires à l'apprentissage des mathématiques*, Hachette éducation, 2018.

Comment enseigner l'addition posée ?

Seul l'algorithme de l'addition posée doit être enseigné au CP. Il doit faire l'objet d'un enseignement précis, guidé et normalisé. Lorsque les élèves ont appris prématurément une technique de calcul posé, beaucoup d'entre eux peuvent avoir tendance à « poser les opérations dans leur tête ». C'est pourquoi l'enseignement du calcul mental et du calcul en ligne doit précéder celui du calcul posé qui apparaîtra en période 3 ou 4, conformément aux repères de progression du cycle 2 (BOEN n° 22 du 29 mai 2019).

La conférence de consensus sur les nombres et le calcul (Cnesco, 2015[28]) recommande d'associer l'apprentissage des techniques opératoires à la compréhension des nombres et des principes de la numération écrite chiffrée : pourquoi aligne-t-on les chiffres rang par rang à partir de la droite ? Pourquoi met-on une retenue ? Ces actions correspondent à des propriétés des nombres associées à l'écriture décimale.

Le calcul posé représente ainsi une tâche complexe qui donne l'occasion de réinvestir à la fois les faits numériques et les connaissances de la numération écrite chiffrée (sur les aspects positionnel et décimal) déjà acquis par les élèves :

- **l'aspect positionnel** permet de donner du sens à l'alignement des chiffres rang par rang. Il conviendra à ce sujet de privilégier une formulation comme « on aligne les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines… », à la formulation « on aligne les chiffres à droite » qui pourra être source d'erreurs lors de la mise en œuvre de cet algorithme avec les nombres décimaux.
- **l'aspect décimal** permet de revenir sur les unités de numération (10 unités = 1 dizaine ; 10 dizaines = 1 centaine) pour comprendre et justifier la ou les retenues. Les cas des calculs posés avec et sans retenue seront traités simultanément.

On peut, lors du déroulement de l'algorithme (cf. figure 18), oraliser les unités de numération : « *5 unités plus 7 unités cela fait 12 unités, c'est-à-dire 2 unités plus 1 dizaine que je mets en retenue, puis 1 dizaine plus 2 dizaines plus 3 dizaines, cela fait 6 dizaines* ».

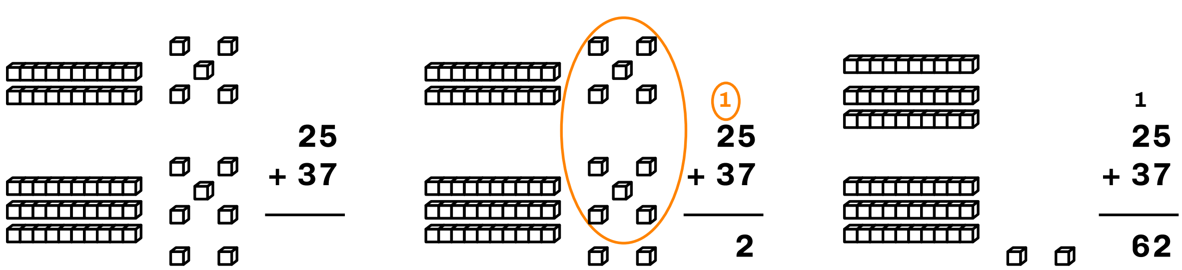


Figure 18. Explicitation de l'addition posée à l'aide d'un matériel de numération.

28 — *Ibid*, p. 51 note 16.

Une extension de la technique à la somme de trois ou quatre termes sera proposée en fin de CP. Le choix d'un nombre inférieur à 10 est essentiel pour faire prendre conscience aux élèves de l'importance de l'alignement rang par rang. L'enseignement de l'addition posée doit donc conduire les élèves à un usage contrôlé de cet algorithme, alliant sens et technique.

Une fois parfaitement maîtrisée, c'est-à-dire lorsque son algorithme est automatisé, l'addition posée donne aux élèves une méthode de calcul qui permet de réaliser des additions de manière sécurisée dans toutes les situations. C'est le cas, dès le CP, des additions de plus de deux nombres, puis au CE1 et au CE2, d'additions de nombres à plus de deux chiffres.

LES OUTILS DE LA TRACE ÉCRITE POUR LES TROIS FORMES DE CALCUL

— L'**ardoise** est un outil facilitant l'entraînement des élèves et la prise d'informations par le professeur. Par l'aspect éphémère de son écrit, elle autorise l'élève à se tromper et facilite son engagement dans la tâche. Elle se révèle particulièrement utile pour travailler l'automatisation de procédures. Néanmoins, l'ardoise ne garde pas de trace de l'évolution des connaissances des élèves et l'évaluation qu'elle permet ne peut être précise. Elle ne doit donc pas être l'unique voie utilisée pour la production écrite mathématique.

— Le **cahier de brouillon ou d'essais** permet à l'élève de garder trace de ses procédures, procédures que le professeur pourra aussi analyser *a posteriori*. Lors de la phase de mise en commun, une sélection des réponses proposées sur les cahiers d'essais peut être projetée grâce à un visualiseur. Cela a pour effet d'alléger la tâche des élèves qui n'ont plus en charge la production d'affiches lisibles par l'ensemble de la classe. L'emploi de tablettes peut faciliter cette étape.

— Le **cahier de leçons** est un cahier-outil dans lequel sont consignés les résultats à connaître et à mémoriser (faits numériques, procédures élémentaires) ainsi que l'algorithme de l'addition posée. Ce sont des écrits proposés par le professeur, le plus souvent construits collectivement, en synthèse des temps de travail.

— Des écrits construits dans la classe de façon collaborative (l'explicitation d'une stratégie de calcul à retenir par exemple) peuvent être réalisés au **tableau** et/ou conservés sur **affiches**.

— Le **cahier du jour** consigne les productions de l'élève.

Quelques difficultés fréquentes autour du calcul

Les difficultés des élèves en calcul sont nombreuses et plurielles. Elles se révèlent en contexte et s'interprètent à partir des erreurs observées. Cela nécessite, pour le professeur, de faire des séries d'observations pour les identifier et de proposer des adaptations et des remédiations.

Prenons l'exemple[29] de Loïc, élève de CP, qui écrit : « *5 + 4 = 8* ». L'erreur de Loïc pourrait être interprétée comme le fait qu'il ne connaît pas ses tables d'addition. Mais on peut aussi faire une autre hypothèse : peut-être a-t-il réalisé un comptage de un en un (mentalement ou en s'aidant de ses doigts), en partant de 5. Cette procédure, appelée surcomptage, même si ce n'est pas la plus efficace, permet de réussir ; c'est son exécution qui est déficiente. Il est préférable dans un premier temps de reconnaître la validité de sa méthode et de l'aider à la mettre en œuvre correctement. Son erreur étant identifiée, on l'orientera, dans un second temps, vers des stratégies plus efficaces, comme par exemple utiliser le fait qu'il connaît 4 + 4 = 8 et qu'il peut en déduire que 5 + 4, c'est un de plus donc 9. L'objectif étant à terme qu'il puisse restituer immédiatement ce résultat qui doit être mémorisé.

Précisons que ces difficultés ne relèvent pas, dans la majorité des cas, d'un trouble spécifique des apprentissages mathématiques (tel que la dyscalculie). En effet, un trouble est durable, avéré et diagnostiqué. En CP, les élèves sont trop jeunes pour être diagnostiqués avec un tel trouble. En revanche, ils peuvent présenter des difficultés, contextuelles et provisoires, dans les premiers apprentissages du calcul.

De manière générale, face à la difficulté d'un élève, trois pistes peuvent être mobilisées par le professeur[30] : **faire verbaliser** les actions de l'élève, **varier les outils de modélisation** et **mobiliser le jeu.**

La difficulté à comprendre le langage symbolique du calcul

Les symboles « = », « + » et « – » sont souvent rencontrés par les élèves en dehors de l'école avant leur introduction en classe. Il convient de les introduire au cours du premier trimestre de l'année scolaire afin que les élèves puissent apprendre, tout au long de l'année, à en faire un usage correct. Nous avons vu précédemment que le signe « = » peut être source de difficulté en étant compris comme l'annonce d'un résultat, ce qui peut conduire à des écritures erronées comme « 8 + 7 = 15 + 3 = 18 ».

29 — Exemple tiré de *Réussir en maths à l'école c'est possible !*, Roland Charnay, Hatier Éducation, p. 64, 2018.
30 — Voir Thierry Dias, *Enseigner les mathématiques à l'école – Une démarche positive pour des apprentissages réussis*, Magnard, 2018.

PISTES DE REMÉDIATION POSSIBLES

- Faire verbaliser les actions de l'élève qui calcule : « *Explique-moi comment tu fais 4 + 3 ?* » ou « *4 plus combien égal 7 ?* »
- Varier les outils de modélisation proposés pour permettre à l'élève de se représenter le calcul et d'effectuer des manipulations réelles ou mentales (cubes, cartes à points).
- Mobiliser le jeu, par exemple :
  - un jeu de déplacement sur piste (cf. chapitre 5, paragraphe intitulé « Analyse d'un jeu de déplacement sur piste », p. 121) proposé avec deux dés dans lequel les dés traditionnels (avec constellations) pourront progressivement être remplacés par des dés à écriture chiffrée. Cette évolution entraînera le passage de la représentation de la quantité vers l'écriture chiffrée. De plus, la disparition des constellations empêchera l'élève de dénombrer les points et permettra le passage des procédures de comptage aux procédures de calcul ;
  - d'autres jeux (bataille, loto, etc.) pourront aider les élèves à faire du lien entre différentes représentations d'un même nombre incluant ses décompositions (additives mais aussi soustractives) ;
  - le jeu du saladier (cf. descriptif et analyse de ce jeu, p. 119) peut aider à donner une représentation de l'addition à trou. Par exemple, 2 + ... = 7 peut se jouer de la manière suivante : il y a 7 jetons en tout, 2 sont visibles, les autres sont sous le saladier, combien de jetons se trouvent sous le saladier ?

La difficulté à mémoriser et mobiliser le répertoire additif

Les fonctions mnésiques sont essentielles dans l'automatisation des faits numériques. Les résultats peuvent être mal mémorisés ou non mémorisés, ce qui nécessite un travail de reconstruction. Il faut entraîner le répertoire mais aussi ménager des moments où les moyens de reconstruire des résultats sont explicités en prenant appui sur des résultats connus.

Certains élèves restent **dépendants de l'usage de leurs doigts** qui est leur seule stratégie de calcul. Michel Fayol[31] précise que les doigts jouent fréquemment un rôle de médiateur, notamment de mémoire externe. Ils permettent également une certaine abstraction dans la mesure où ils peuvent être utilisés pour représenter des objets de nature très différente (des étoiles, des fourmis, des voitures, etc.). D'autre part, l'usage des doigts peut être utile pour accompagner certains calculs, par exemple pour trouver la décomposition 8 = 5 + 3.

Si l'usage des doigts est un outil souvent nécessaire au début de la scolarité, il ne doit pas être le seul et les doigts devront être abandonnés au profit d'autres stratégies plus efficaces ou de la mémorisation des faits numériques à connaître. Ainsi, au CP, à partir du moment où la table d'addition est construite, le professeur doit progressivement

31 — Voir Michel Fayol, *L'Acquisition du nombre*, PUF, coll. « Que sais-je ? », 2012.

aider les élèves à dépasser cette procédure de comptage avec les doigts, faute de quoi ils pourraient en rester prisonniers et se trouver en difficultés lors du traitement de calculs plus complexes. L'enjeu pour le professeur est de conduire chacun de ses élèves, dans le respect de son rythme, à abandonner et dépasser l'usage des doigts au profit d'autres procédures de calcul mental.

PISTES DE REMÉDIATION POSSIBLES

— Faire verbaliser l'élève et le conduire à expliciter ses procédures de calcul. Lui demander comment il pourrait faire sans utiliser ses doigts.
— Varier les outils de modélisation. Par exemple, pour une famille du répertoire additif comme les doubles (cf. famille n° 3 p. 61), proposer des outils (cubes, constellations de points, cartes à points, cartes rapides) qui permettent la construction d'images mentales qui pourront ensuite être évoquées.
— Mobiliser le jeu permettant d'entraîner à la mémorisation des faits numériques (cf. chapitre 5).

Les difficultés à réaliser une addition posée

Les difficultés rencontrées en calcul posé peuvent être de différentes natures. On peut distinguer :

— les **erreurs dans la disposition des chiffres**, soit parce que les nombres donnés sont écrits en colonnes et non en lignes, soit en raison d'un alignement qui est fait en partant de la gauche et non en référence aux unités de numération (unités sous unités, dizaines sous dizaines, etc.), erreur visible seulement lorsque les nombres utilisés n'ont pas la même longueur ;
— les **erreurs de gestion de retenue** : soit la retenue est oubliée ; soit elle est écrite mais l'élève n'en tient pas compte ; soit un nombre à deux chiffres est écrit dans la colonne d'une unité de numération ; soit la retenue est toujours égale à un, soit l'élève garde en retenue le chiffre des unités et non celui des dizaines, etc. ;
— les **erreurs de calculs** liées à la mobilisation des tables d'addition.

PISTES DE REMÉDIATION POSSIBLES

— Faire verbaliser l'élève. Lorsque le calcul posé écrit montre un résultat erroné, il convient d'engager l'élève à refaire le calcul (éventuellement avec d'autres nombres), de l'observer dans cette tâche et de l'engager à expliciter sa démarche.
— Faire verbaliser l'élève lors du déroulement de l'algorithme en utilisant les unités de numération : « *7 unités plus 4 unités font 11 unités, ce qui fait 1 dizaine que je mets en retenue dans la colonne des dizaines et 1 unité que j'écris dans la colonne des unités. 5 dizaines plus 1 dizaine cela fait 6 dizaines, plus la dizaine que j'ai mise en retenue, cela fait 7 dizaines que j'écris dans la colonne des dizaines* ».
— Varier les outils proposés. Pour faciliter le traitement d'un calcul posé et en fonction des erreurs relevées, différents outils pourront être proposés aux élèves :
  - si l'erreur vient d'une mauvaise disposition des nombres, l'usage du tableau de numération pourra donner sens à ces colonnes qui se réfèrent à l'aspect positionnel du système de numération ;

- si l'erreur vient d'une mauvaise gestion de la retenue, c'est l'usage du matériel de numération de référence qui sera proposé. La retenue sera mise en lien avec les groupements (10 unités = 1 dizaine ; 10 dizaines = 1 centaine) se référant cette fois à l'aspect décimal du système de numération. Les manipulations proposées seront d'abord réelles puis mentales. Dans ce dernier cas, le matériel pourra servir à valider le résultat du calcul ;
- si l'erreur vient de la mauvaise connaissance du répertoire additif, la mise à disposition des tables d'addition sera une aide adaptée.

Focus | Une séquence de calcul

Le calcul mental et le calcul en ligne doivent faire l'objet d'une pratique quotidienne d'au moins 15 minutes. On privilégiera, dans le cadre de plans de séquences, l'alternance de séries de séances courtes (10-15 minutes) avec des séances longues (30-45 minutes).

Organisation d'une séance longue de calcul

Une séance **longue** de calcul peut être organisée selon les trois temps ci-dessous, une séance courte se limite aux temps 1 et 2.

TEMPS 1	**Échauffement :** activité très courte (max. 5 min) pour réactiver des faits numériques ou relations entre les nombres déjà mémorisés. Elle vise la réussite de tous.
TEMPS 2	**Entraînement :** activité de mémorisation des faits numériques ou de mobilisation de procédures élémentaires. Différentes modalités de travail (procédé Lamartinière, application en ligne comme Plickers par exemple, jeux, petits problèmes, etc.) peuvent être proposées.
TEMPS 3	**Recherche :** activité qui nécessite un temps de recherche individuel des élèves et qui autorise l'usage de l'écrit. Elle donne lieu à une explicitation et hiérarchisation des procédures.

Exemple d'organisation d'une séquence

Pour atteindre les objectifs visés, les séances de calcul ne peuvent s'improviser et doivent s'inscrire dans une progression. Comme pour tous les apprentissages, il faut une structure, une gradation de la difficulté, une explicitation des procédures et de l'entraînement, ce qui implique la mise en place de plans de séquence.

Voici une proposition de séquence de calcul, découpée en plusieurs séances et destinée à développer la maîtrise d'une procédure élémentaire de calcul sur les presque-doubles. Elle pourra être proposée en CP à partir de la période 3.

	DÉCOUVERTE SÉANCE LONGUE	APPROPRIATION ET ENTRAÎNEMENT SÉANCES COURTES		RÉINVESTIS-SEMENT SÉANCE COURTE
ÉCHAUFFEMENT	Furet de 1 en 1	Réviser les doubles	Donner le successeur	Fluence des presque-doubles
ENTRAÎNEMENT	Doubles **Exemple :** *Donner le double de 2, de 3, de 4, de 5, etc.*	Appropriation et entraînement de la procédure par le double + 1. **Exemple :** *Calculer 6 + 7, 3 + 4, 5 + 6, etc.*	Automatisation de la procédure **Exemple :** *Calculer 6 + 7, 5 + 6, 7 + 8, etc. 6 + … = 13 ?*	Problème **Exemple :** *Julie a 6 billes et Paul a 7 billes. Combien ont-ils de billes en tout ?*
RECHERCHE	Presque-doubles **Exemple :** *Comment calculer 6 + 7 = ?*			

Des temps de révision seront proposés ultérieurement pour favoriser l'ancrage dans la mémoire à long terme. Les presque-doubles devront être restitués de manière automatique par les élèves.

En résumé

- **L'ambition de l'enseignement du calcul au CP est de développer une pratique aisée du calcul** sous ses différentes formes (calcul mental, en ligne, posé), s'appuyant sur des faits numériques à mémoriser et des procédures élémentaires à automatiser. Il articule un travail à la fois fréquent sur les nombres, leurs propriétés et les opérations, mais aussi sur une gradation de la difficulté rencontrée. Il convient de donner au **calcul mental et au calcul en ligne une place prépondérante** dans l'enseignement du calcul.

- La **manipulation** et la **verbalisation** jouent des rôles essentiels dans le processus d'**abstraction**, notamment en favorisant la compréhension du sens de l'opération et l'introduction progressive du symbolisme (+, -, =).

- L'**institutionnalisation** des apprentissages en calcul mental et calcul en ligne doit faire l'objet d'une attention particulière. Il est nécessaire de hiérarchiser les procédures mises en place par les élèves, de débattre et de statuer sur leur portée. Ces éléments constituent alors une **trace écrite** claire dans les cahiers des élèves.

III

Résolution de problèmes et modélisation

Au cycle 2, les programmes placent « *la résolution de problèmes au centre de l'activité mathématique des élèves* » et précisent que « *les problèmes permettent d'aborder de nouvelles notions, de consolider des acquisitions, de provoquer des questionnements* ». La résolution de problèmes doit débuter dès le début de l'année de CP et reposer sur un travail régulier et structuré. Il est important de ne pas différer cet enseignement et de ne pas le corréler à l'autonomie en lecture des élèves.

Ce chapitre vise à clarifier la démarche d'enseignement permettant aux élèves d'apprendre à résoudre des problèmes, notamment à travers la modélisation, tout en l'inscrivant dans la perspective plus large de ce travail mené tout au long du cycle 2.

Introduction

La lecture des programmes met en évidence un triple objectif autour des problèmes :

- apprendre aux élèves à résoudre des problèmes ;
- aborder de nouvelles notions (numération décimale, sens des opérations, langage mathématique) et **consolider ces acquisitions** ;
- développer les capacités des élèves à chercher, raisonner et communiquer, c'est-à-dire à acquérir des compétences potentiellement transférables.

Au regard de la note de service n° 2018-050 (BOEN n°3, 2018), il s'agit prioritairement de mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes. On débutera cet enseignement dès le début du CP à partir des premiers jalons posés en maternelle.

Cela nécessite[32] de conduire, année après année, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier pour faire acquérir aux élèves les connaissances et les compétences leur permettant de :

— comprendre le problème posé ;
— établir une stratégie pour le résoudre (en faisant par exemple des analogies avec un modèle connu, en décomposant ou recomposant le problème en sous-problèmes, en s'appuyant éventuellement sur des outils auxiliaires, par exemple un schéma ou un tableau, en faisant des essais, en partant de ce que l'on veut trouver) ;
— mettre en œuvre la stratégie retenue ;
— revenir sur la solution et prendre du recul sur leur travail.

Les attendus de fin de CP à propos de la résolution de problèmes

Les attendus de fin d'année de CP fixent ce que les élèves doivent savoir faire et constituent des éléments pour envisager la progressivité des apprentissages pour ce domaine des mathématiques. Concernant la résolution de problèmes, cela peut se résumer dans le tableau suivant :

CHAMP ADDITIF	CHAMP MULTIPLICATIF
– Résoudre des problèmes additifs et soustractifs en une ou deux étapes ; – Modéliser ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques ; – Connaître le sens des signes « + » et « – ».	– Résoudre des problèmes de multiplication ou de division, en une étape, sur des petits nombres, avec le recours à la manipulation.

Partant des connaissances et compétences attendues, la réflexion engagée dans ce chapitre se centrera sur :

— les fondamentaux de la démarche d'enseignement de résolution de problèmes ;
— les enjeux de la résolution et de la modélisation avec, en particulier, l'introduction progressive de schémas calculatoires, le continuum didactique tout au long du cycle 2 ;
— les traces écrites et l'importance de l'institutionnalisation.

32 — Voir George Pólya, « La découverte des mathématiques », 1969 : https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1969_num_6_1_1972_t1_0059_0000_2

De quels problèmes parle-t-on ?

La catégorisation des problèmes ne constitue pas une fin en soi, ni une priorité, pour aborder l'enseignement de la résolution de problèmes, en particulier du côté de l'élève.

Selon le point de vue adopté par les chercheurs, les catégorisations varient fortement. Certaines de ces catégorisations peuvent d'ailleurs être des éléments mettant inutilement en difficulté les professeurs, que ce soit par la complexité de leur formalisme ou dans la description détaillée de nombreuses sous-catégories.

Des recherches récentes en didactique[33] ont permis de définir trois types de problèmes.

LES PROBLÈMES BASIQUES (ÉLÉMENTAIRES)

Cette catégorie recouvre par exemple les problèmes à deux données où il s'agit d'en déterminer une troisième, ou des problèmes qui peuvent être résolus, à partir de données fournies explicitement dans l'énoncé, à l'aide d'un seul type d'opération : l'énoncé est court, la syntaxe simple, sans information superflue, le contexte facile à comprendre. **Il s'agit essentiellement de problèmes arithmétiques à une étape.**

Une grande variété de tels problèmes sera proposée aux élèves en vue d'analyser avec eux **leurs ressemblances**. À terme, une résolution aisée de ces problèmes est attendue ; ce seront les éléments « simples » constitutifs du raisonnement et mobilisés dans la résolution des problèmes complexes. La schématisation jouera à ce titre un rôle prépondérant, comme nous le verrons plus loin, relativement à la construction et l'identification par les élèves d'analogies entre les différents problèmes basiques.

Exemple de problème basique en CP : « *Il y a 36 oiseaux dans l'arbre, 21 oiseaux s'envolent. Combien en reste-t-il ?* »

LES PROBLÈMES COMPLEXES

Ce sont des « agrégats de problèmes basiques ». La résolution des problèmes complexes va nécessiter plusieurs étapes.

Catherine Houdement note que « *la complexité des problèmes peut venir de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour élaborer la réponse* »[33]. La construction et la connexion des informations, nécessaires à la résolution, sont à la charge de l'élève. Cela impose, d'une part, d'identifier et de savoir résoudre les problèmes basiques sous-jacents et, d'autre part, de mobiliser des compétences supplémentaires : connecter les informations pour construire le (les) sous-problème(s) basique(s).

La résolution des problèmes complexes permet au professeur de s'assurer plus solidement des connaissances et des compétences acquises par les élèves. Elle permet de tester la disponibilité des connaissances et favorise un retour sur les problèmes basiques. La construction des compétences en résolution de problèmes arithmétiques se fait de manière dialectique, par allers-retours entre les problèmes basiques et les problèmes complexes.

33 — Voir Catherine Houdement, « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école », revue *Grand N*, n° 100, p. 59-78, 2017.

Les programmes (BOEN n°3, 2018) précisent qu'il est important de proposer des problèmes à deux étapes dès le début du cycle 2.

Exemple de problème complexe en CP : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums jeunesse, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y a-t-il de livres documentaires ?* »

LES PROBLÈMES ATYPIQUES

Ces problèmes, appelés aussi « *pour apprendre à chercher* », visent l'inventivité stratégique et la prise de risque. Ils sont « *définis par leur caractère non routinier ; les élèves ne disposent pas de stratégies connues a priori pour les résoudre* »[34]. Ils doivent procéder à une phase de recherche plus marquée s'appuyant sur la mémoire de problèmes et la mobilisation des acquis.

Ces problèmes relèvent de stratégies spécifiques, ce qui permet de les particulariser auprès des élèves par rapport aux problèmes basiques. Ces problèmes mettent en jeu des stratégies attendues particulières[35] qu'il convient, selon le niveau d'enseignement, d'expliciter pour développer des compétences transférables. Ils peuvent ainsi constituer un travail spécifique qui est à conduire en parallèle des autres problèmes.

Exemple de problème en CP : « *On veut habiller des clowns avec des costumes constitués d'un chapeau et d'un pantalon. Les chapeaux peuvent être rouge, jaune ou vert. Les pantalons peuvent être bleu, orange, marron ou noir. Combien de costumes peut-on constituer ?* »

« *Les frontières entre les 3 types de problèmes sont mouvantes et ne constituent pas des absolus bien définis* »[36]. Par exemple, un problème de partage, atypique en CP, peut devenir basique en CE2.

Enfin, un problème complexe peut être considéré par un élève comme basique dès lors qu'il sait le résoudre en sautant implicitement des étapes.

POINT DE VIGILANCE

Les problèmes arithmétiques élémentaires et complexes forment l'essentiel du travail de résolution de problèmes à l'école élémentaire.

La suite de ce chapitre sera consacrée à la résolution de problèmes élémentaires et complexes.

34 — *Ibid*, p. 80, note 33.
35 — Par exemple, classer selon un critère des objets pour pouvoir les dénombrer, utiliser un graphe pour raisonner, utiliser le principe du tiers exclu qui exprime que s'il y a deux choix, exclure l'un oblige à choisir l'autre. Ce dernier raisonnement intervient très souvent à l'école primaire de manière implicite, lorsqu'on dit par exemple « ces personnes ne sont pas des adultes, donc ce sont des enfants ».
36 — *Ibid*, p. 80, note 33.

Les fondamentaux de la démarche d'enseignement de la résolution de problèmes (maternelle/cycle 2)

Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation

L'accès à l'abstraction est un long processus. En mathématiques, ce processus fondamental est associé à la maîtrise d'un langage symbolique et des compétences de haut niveau que sont le raisonnement et la modélisation, convoquées dans la résolution de problèmes.

Abstraire correspond à l'opération mentale qui consiste à isoler une (ou plusieurs) propriété(s) d'un objet afin de la (les) considérer pour elle(s)-même(s). Cela nécessite donc de se détacher du réel, du contexte dans lequel on a manipulé et/ou représenté l'objet.

L'abstraction prend appui sur trois étapes concomitantes essentielles, la manipulation, la représentation et la verbalisation, qui permettent le passage progressif vers l'abstraction.

LA MANIPULATION

La manipulation consiste à agir sur des objets tangibles (par exemple des cubes) ou symboliques (par exemple des nombres). Cette étape passe par l'action. Pour l'élève qui n'a qu'une expérience encore limitée des objets mathématiques, il s'agit d'apprendre « par le faire » dans des situations qui mobilisent du matériel.

Cependant, il est important de distinguer la manipulation passive de la manipulation active vis-à-vis d'un apprentissage mathématique visé. En effet, la manipulation permet à l'élève de s'approprier la situation, de s'en faire une première représentation. Mais cette première phase n'est pas suffisante : cette étape doit également conduire à une anticipation d'une solution au problème.

L'exemple ci-contre illustre ce qui distingue la manipulation passive de la manipulation active.

MANIPULATION PASSIVE ET MANIPULATION ACTIVE :
EXEMPLE AVEC LA SITUATION DE LA BOÎTE[37]

Manipulation passive : le professeur dispose **A** jetons dans la boîte, puis **B** jetons et pose la question du nombre total de jetons dans la boîte. Les élèves ont accès au contenu de la boîte et peuvent se contenter de lire le résultat en recomptant les jetons.

Manipulation active : le professeur montre successivement les deux collections de jetons et les place dans la boîte, la referme et pose la question. Dans ce cas, l'élève va mobiliser des représentations mentales et ses connaissances sur les nombres, ainsi que des procédures de plus haut niveau pour résoudre le problème.

La manipulation n'est donc pas une finalité mais une étape intermédiaire permettant d'engager un travail cognitif. Le matériel change progressivement de statut ; de matériel pour constater, observer, il devient matériel pour valider ce qu'on est capable d'anticiper. Il permet de raisonner sur les procédures.

DE LA MANIPULATION À LA REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE

Cette étape est fondamentale dans la résolution de problèmes : elle convoque la représentation imagée qui amène à se représenter quelque chose sans l'avoir sous les yeux. Il peut s'agir de représenter par une image, un dessin, une photo, un pictogramme, un schéma, etc. L'action est transformée en image mentale.

Les représentations sont d'abord proches de la réalité du problème (représentation des objets tangibles), puis elles évoluent progressivement vers des représentations plus abstraites et génériques telles que les schémas ou l'écriture mathématique. Toutes ces représentations ne se valent pas et n'ont pas la même portée, notamment dans la résolution de problèmes.

37 — La situation de la boîte, une situation de référence du champ additif au CP (cf. chapitre 2, p. 53).

L'exemple suivant illustre la progressivité, au niveau de la maternelle et au CP :

« *Au supermarché, j'ai acheté 4 pommes rouges et 2 pommes vertes. Combien ai-je de pommes dans mon panier ?* »

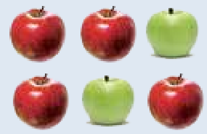
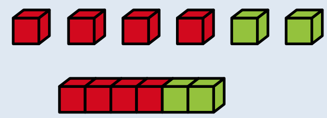
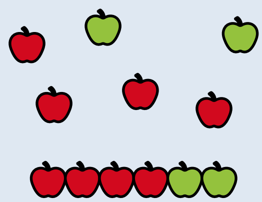
MODE SENSORI-MOTEUR[38]	**Manipulation d'objets tangibles proches de la réalité :** 	**Manipulation d'objets tangibles figuratifs :** 
MODE IMAGÉ	**Représentations imagées des objets tangibles proches de la réalité :** 	• **Représentation avec un schéma :**  • **Représentation présymbolique (schéma en barres + écriture symbolique) :** 
MODE SYMBOLIQUE	**Écriture en langage mathématique :** 4 + 2 = 6	

Figure 19. Progression des représentations.

La représentation présymbolique proposée par l'enseignant, sous forme de rectangles dans lesquels sont inscrites les valeurs numériques de l'énoncé[39] ont une portée plus vaste qui sera décrite dans le paragraphe intitulé « Problèmes arithmétiques au CP et au cycle 2 : la modélisation pour aider à résoudre des problèmes », p. 89), relatif à la modélisation.

L'écriture mathématique, qui traduit de manière symbolique la situation rencontrée, s'introduit progressivement (cf. chapitre 2).

38 — Jerome Bruner, dans *The Relevance of education* (1973), emploie les termes respectifs « ***mode énactif*** », « ***mode iconique*** » et « ***mode symbolique*** ».

39 — Le respect d'une proportion relative entre la longueur des rectangles et des nombres correspondants ne peut être un exigible en cycle 2. Cependant quelques points d'évidence s'imposent : la grande quantité doit être représentée par un rectangle plus grand.

Lien avec la maternelle et importance du matériel

Les enjeux pour l'école maternelle sont doubles. Il s'agit d'une part d'installer des attitudes préparant à la résolution de problèmes, attitudes qui mobilisent les actions « *anticiper, choisir, décider, essayer, recommencer, s'interroger sur la validité de la réponse proposée* » (BOEN du 29 mai 2019), et d'autre part d'utiliser les connaissances sur les nombres pour résoudre des problèmes.

Les problèmes en maternelle sont définis comme « *des situations dans lesquelles la réponse n'est pas d'emblée disponible* » ; ils doivent permettre de « *trouver une quantité donnée d'objets,* [de donner] *le nombre nécessaire d'objets pour compléter une boîte dont le nombre de cases est donné ou connu* [...] *Les activités d'apprentissage proposées s'appuient sur un matériel varié* [...] *permettant la manipulation de quantités tangibles* » (BOEN du 29 mai 2019).

Le fait de pouvoir agir ou non sur les objets (les déplacer ou non) constitue une première étape vers une manipulation mentale et provoque la nécessité d'anticiper la réponse lorsque les objets sont absents ou éloignés. Ces situations feront l'objet d'une reprise à l'entrée du CP.

Les situations d'apprentissage liées à la résolution de problèmes seront répétées autant que nécessaire ; elles contribueront à constituer une première mémoire de problèmes et à installer une culture scolaire de la résolution de problèmes. Il s'agit donc de penser cette articulation entre école maternelle et CP.

Afin de préparer les élèves de maternelle à accéder à ces représentations, le matériel tangible devra être progressivement remplacé par des objets manipulables moins figuratifs, comme des cubes emboîtables (cf. chapitre 4, paragraphe intitulé « Cubes emboîtables sécables », p. 108).

Les situations dans lesquelles une commande « écrite » est nécessaire peuvent être proposées dès la moyenne section.

EXEMPLE DE SCÉNARIO CLASSIQUE EN GRANDE SECTION

Énoncé oral du problème : « *Vous répartissez 8 marrons dans 3 assiettes.* »

Phase 1 : la manipulation avec des marrons permet l'appropriation du problème et de faire des essais.
Phase 2 : les élèves dessinent la situation de manières très variées allant de dessins figuratifs à des ébauches de schémas (cf. figure 20).

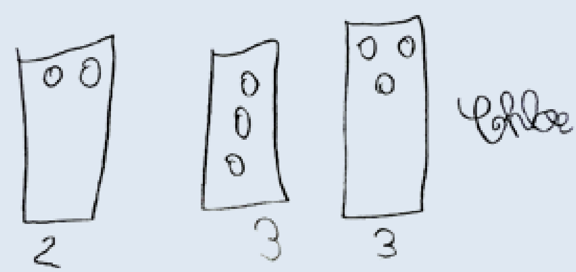


Figure 20. Représentation figurative.

Phase 3 : après rappel de l'activité précédente, les élèves doivent proposer sans matériel une autre répartition sur leur feuille. La vérification pourra se faire à l'aide du matériel, accompagnée d'une formulation orale.

LA PLACE DE LA VERBALISATION DANS L'ACCÈS À L'ABSTRACTION

Les deux étapes décrites précédemment – la manipulation et la représentation – n'ont pas d'ordre figé dans la démarche d'apprentissage de la résolution de problèmes. En revanche, elles s'accompagnent obligatoirement d'étapes de verbalisation incontournables permettant d'accéder aux concepts mathématiques et à l'abstraction.

La verbalisation permet de mettre en mots et d'expliciter l'action, sans la produire ou la représenter visuellement. Cette étape cruciale est délicate à travailler. La verbalisation concerne à la fois le professeur et les élèves.

Du point de vue du professeur

Verbaliser correspond à une phase d'étayage très importante, notamment en CP. Le professeur s'applique à verbaliser les étapes de la démarche et ses propres procédures en passant par des exemples/contre-exemples et des analogies avec des situations déjà rencontrées. Il fait également des liens explicites avec les connaissances et compétences à mobiliser pour résoudre le problème (en calcul mental, ordre de grandeurs, procédure connue, etc.). En s'appuyant sur les productions des élèves, il s'attache à formuler et reformuler le langage mathématique précis (sens des symboles et lexique spécifique) en action, lors des étapes de manipulation et de représentation, ainsi qu'en situation d'évocation, lors des phases de mise en commun et d'institutionnalisation (cf. paragraphe intitulé « Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation », p. 100).

Il doit verbaliser ses procédures afin que les élèves soient capables de verbaliser leurs propres procédures.

Du point de vue de l'élève

Il s'agit pour l'élève d'expliciter ses actions, sa démarche et ses solutions. Ces verbalisations lui permettent en premier lieu de prendre du recul par rapport aux manipulations, de formuler des hypothèses, d'anticiper et d'expliciter ses procédures. Elles l'aident à produire des arguments mathématiques pour valider ses solutions.

La verbalisation est importante à trois niveaux pour l'élève :

- pour lui-même : elle va lui permettre d'opérer un retour réflexif sur son propre raisonnement et de ne pas rester au stade de la simple manipulation. C'est l'occasion de prendre conscience de ses propres stratégies ;
- en direction des autres élèves : elle permet de préciser l'argumentation pour la rendre compréhensible par les autres, de comparer ses propres stratégies avec celles des camarades, et de travailler à l'émergence d'un référentiel de savoir commun ;
- en direction du professeur : elle doit être encouragée. La verbalisation permet au professeur de prendre de l'information et de proposer un étayage adapté.

Quelques points de vigilance

Le professeur doit provoquer, par des questions ciblées, les verbalisations des élèves à toutes les étapes du processus. Voici quelques questions qui peuvent être utilisées pour passer :

- de la manipulation passive à la manipulation active : « *À quoi réfléchis-tu ?* » ; « *Où en es-tu ?* » ; « *Que dois-tu faire pour … ?* » ;
- de la manipulation active à la formulation, à l'explicitation des procédures : « *Comment as-tu fait ?* » ; « *Peux-tu me dire ce qui va se passer si … ?* » ; « *Crois-tu qu'il va se passer …. si … ?* » ;
- de la manipulation active à la validation des solutions proposées : « *Peux-tu dire quelle solution tu as trouvée ?* » ; « *Peux-tu vérifier ?* » ;
- de la formulation, de l'explicitation des procédures à la validation des solutions proposées : « *Comment fais-tu ?* » ; « *Peux-tu me donner un exemple ?* » ; « *Comment peux-tu en être certain ?* »

Faire évoluer les procédures

Un même problème peut donner lieu à des stratégies diverses (cf. l'introduction de ce guide) induisant différentes procédures de la part des élèves (dénombrement, surcomptage, calcul en ligne, etc.). Elles relèvent de niveaux de conceptualisation variés **qu'il s'agira de faire évoluer dans l'année**.

Pour rappel, les trois types de stratégies codifiés sont :

- **Stratégie 1** : stratégies de dénombrement plutôt élémentaires ;
- **Stratégie 2** : stratégies de dénombrement s'appuyant sur des représentations symboliques des collections ;
- **Stratégie 3** : stratégies de (ou proches du) calcul, plus ou moins explicitées ou formalisées.

L'objectif de l'enseignement de la résolution de problèmes est d'arriver progressivement à des procédures relevant de la stratégie 3 et en particulier à la production d'écritures mathématiques. Pour cela, le professeur devra pouvoir repérer dans l'action ces différentes stratégies.

Dans l'exemple ci-dessous, pour faire progresser l'élève 4, le professeur pourra rapprocher sa procédure de celle de l'élève 2.

ÉLÈVE 1

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ? 14

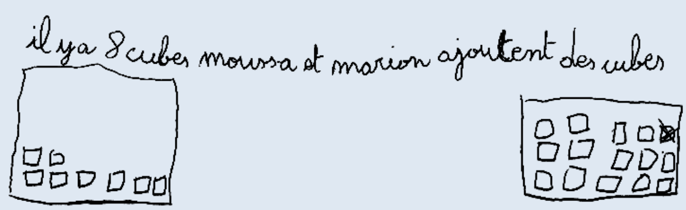


Figure 21. Stratégie de type 1.

ÉLÈVE 2

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ?

Figure 22. Stratégie de type 3 qui associe représentation imagée encore figurative et le calcul.

ÉLÈVE 3

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ? 14

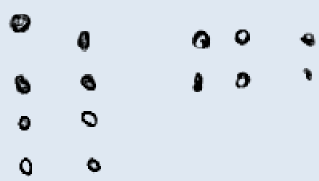


Figure 23. Stratégie de type 1 où les données sont représentées et organisées en paquets de deux.

ÉLÈVE 4

PROBLÈME

Il y a 8 cubes dans une boîte. Moussa puis Marion ajoutent des cubes dans la boîte. Moussa en ajoute 4. Ensuite, Marion en ajoute 2.

- Combien y-a-t-il de cubes dans la boîte à la fin ?

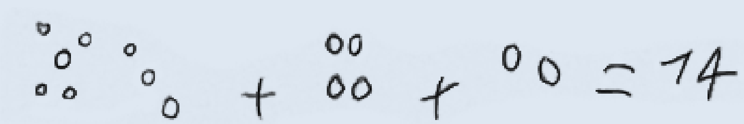


Figure 24. Stratégie hybride de types 2 et 3 qui associe représentation imagée et approche du calcul.

Problèmes arithmétiques au CP et au cycle 2 : la modélisation pour aider à résoudre des problèmes

Pour résoudre efficacement les problèmes arithmétiques au CP et tout au long du primaire, la modélisation joue un rôle important. Cependant il convient de faire une distinction entre « représentation » et « modélisation ».

Représenter, c'est traduire par un dessin ou un schéma la situation. Le fait de représenter la situation permet de l'appréhender et de favoriser l'entrée dans la résolution. Certaines représentations (souvent de type pictural) ne sont pas traduisibles par un calcul.

Modéliser, c'est traduire mathématiquement la situation. La modélisation amène ensuite à la procédure et au calcul ; elle rend la réalité calculable. Il s'agit d'un processus qui peut prendre appui sur diverses représentations.

Faire le lien avec la numération et le calcul

Au CP, les élèves poursuivent le travail mené en maternelle sur les situations de décomposition et recomposition de collections à partir d'objets concrets ou figuratifs qui permettent d'automatiser progressivement les relations entre les nombres. Les élèves s'approprient puis construisent des « histoires sur les nombres » mettant en œuvre les notions de parties et de tout qui conduisent à des « problèmes mathématiques » (énoncé oral ou écrit comportant des données numériques et une ou plusieurs questions).

Travailler des problèmes de type additif est l'occasion de conduire en parallèle un travail sur la numération (cf. chapitre 1) ou le calcul (cf. chapitre 2) en utilisant un matériel adapté.

Les élèves pourront ainsi manipuler des cubes représentant les objets en jeu dans le problème ci-dessous, consistant à réunir deux collections pour trouver un tout :

➔ « *Lucie a 12 billes bleues et 23 billes rouges. Combien a-t-elle de billes en tout ?* »

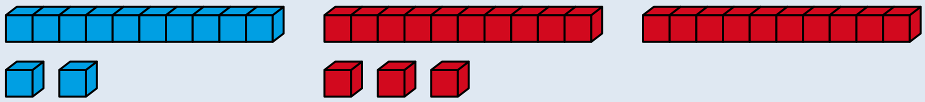


Figure 25. Réunir deux collections pour trouver un tout.

Ou encore, lorsqu'il s'agit de scinder une collection en deux pour trouver une partie :

➔ « *Lucie avait 36 billes avant la récréation. Elle en a perdu 12 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ?* »

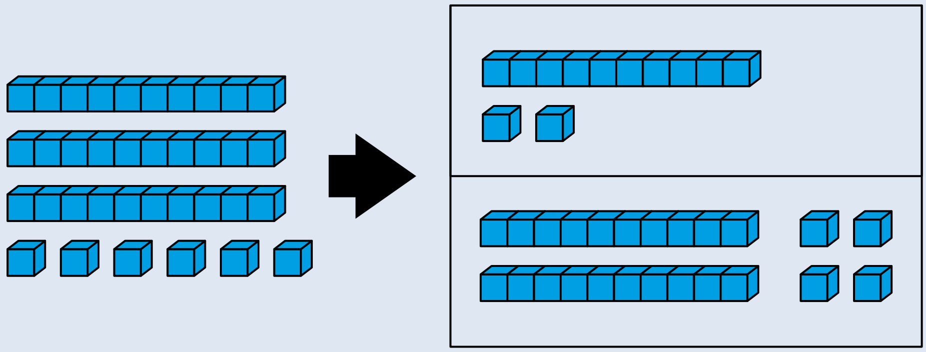


Figure 26. Scinder une collection en deux pour trouver une partie.

Ces actions conduiront progressivement à renforcer le travail sur la numération, en choisissant des nombres conduisant à regrouper 10 unités pour former une dizaine entière ou à « casser une dizaine entière », comme dans les deux exemples ci-dessous :

➔ « *Lucie a 16 billes bleues et 25 billes rouges. Combien a-t-elle de billes en tout ?* »

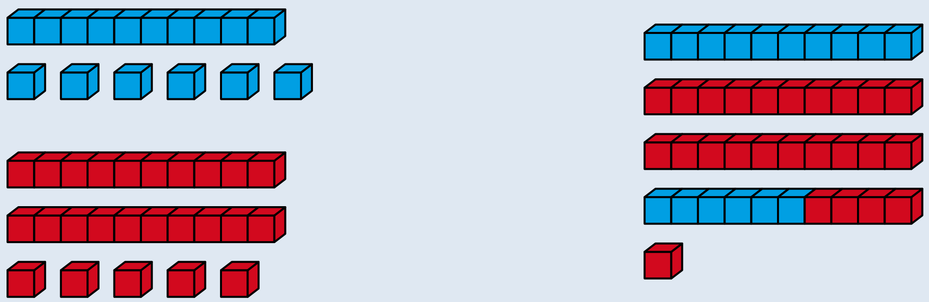


Figure 27. Regrouper 10 unités pour former une dizaine entière.

➔ « *Lucie avait 32 billes avant la récréation. Elle en a perdu 14 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ?* »

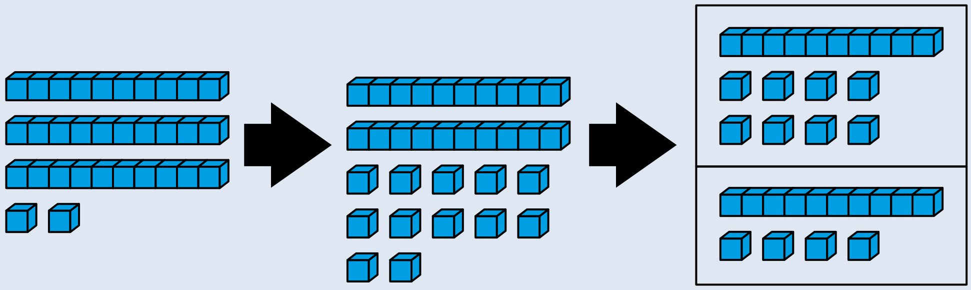


Figure 28. « Casser une dizaine entière ».

Ces travaux avec un matériel sont progressivement remplacés par une activité plus abstraite consistant à imaginer ces manipulations en construisant des schémas avec des représentations imagées des cubes et des barres de 10 cubes. À partir de la période 2, ces schémas peuvent être accompagnés de l'expression symbolique donnant le calcul à effectuer et du résultat de ce calcul.

Les productions suivantes sont des exemples pouvant être attendus des élèves en cours de CP.

En fin de CP mais surtout en CE1, les élèves pourront ne plus faire ce genre de schémas lorsque la modélisation et le calcul à effectuer leur seront plus accessibles. Ils pourront éventuellement remplacer le schéma s'appuyant sur la numération par un schéma plus abstrait et plus rapide à réaliser, s'appuyant sur la numération chiffrée et le modèle en barres proposé dans le paragraphe suivant.

EXEMPLE 1

➔ *« Lucie avait 36 billes avant la récréation. Elle en a perdu 12 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ? »*

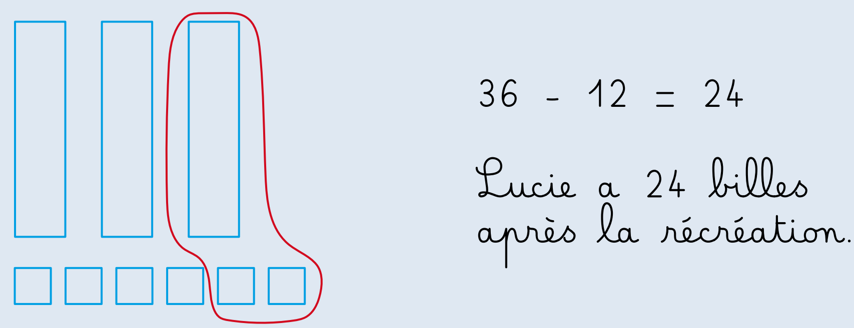


Figure 29. Exemple 1 de production d'élève.

EXEMPLE 2

➔ *« Lucie à 16 billes bleues et 25 billes rouges. Combien a-t-elle de billes en tout ? »*

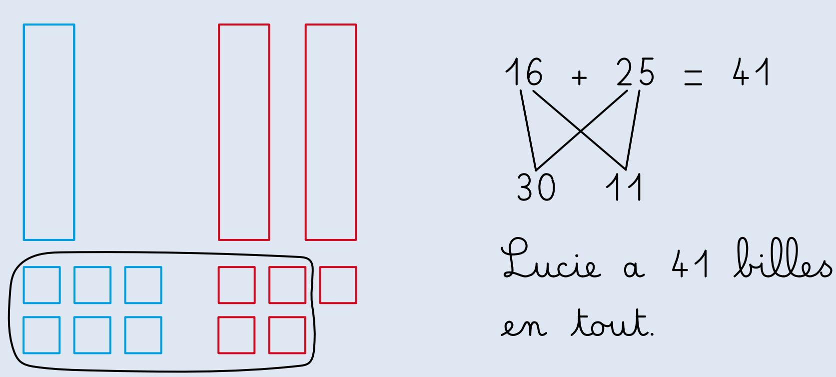


Figure 30. Exemple 2 de production d'élève.

EXEMPLE 3

➔ *« Lucie avait 32 billes avant la récréation. Elle en a perdu 14 pendant la récréation. Combien de billes a Lucie après la récréation ? »*

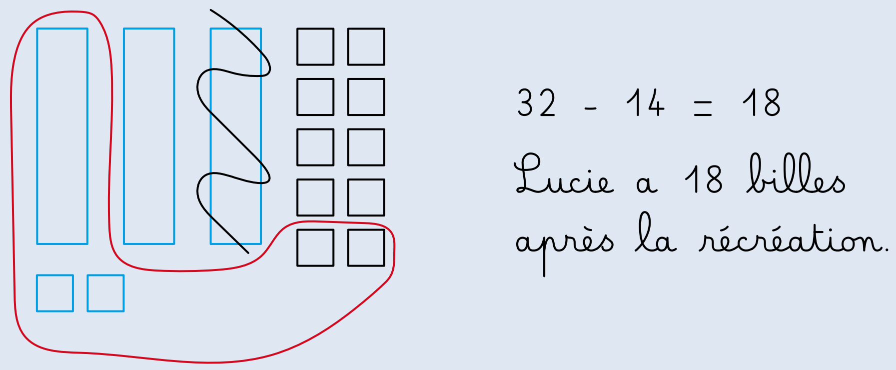


Figure 31. Exemple 3 de production d'élève.

Les problèmes additifs : passer du dessin figuratif au schéma grâce au matériel

Les problèmes relevant du champ additif permettent de travailler le sens de l'addition et de la soustraction. Les problèmes proposés seront tout d'abord à une étape, puis à deux étapes. Pour les problèmes à une étape, le champ numérique évoluera au fil de l'année pour mobiliser des valeurs numériques inférieures ou égales à 100 en fin d'année scolaire.

L'objectif pour le professeur n'est pas d'enseigner une **typologie de problèmes** pouvant relever de ce champ additif, mais plutôt d'aider les élèves à modéliser en utilisant des schémas, des nombres, des opérations pour résoudre ces problèmes.

L'évolution des représentations produites par les élèves et les stratégies associées reposent sur les points suivants :

- les variables didactiques que constituent le choix du matériel proposé aux élèves, la taille des nombres dans les énoncés ;
- les connaissances mobilisables en calcul ;
- un contrat à installer entre le professeur et l'élève sur l'objectif de l'activité et les connaissances et compétences visées.

Tous les matériels ne sont pas équivalents quant aux représentations schématiques qu'ils peuvent générer et aux calculs et stratégies qui peuvent être développés à partir de ces représentations. Les cubes emboîtables, le matériel multibase, les réglettes sont des éléments intéressants pour convoquer les aspects additifs, les propriétés de décomposition des nombres ou le sens des opérations (cf. chapitre 4). Ils sont des supports utiles pour des représentations qui contribuent à la modélisation.

Commencer par des petits nombres permet une familiarisation avec les représentations. Augmenter la taille des nombres permet de rendre nécessaire l'introduction des premières représentations schématiques et symboliques, au moment de la résolution, mais aussi et surtout dans un premier temps de discuter, d'échanger, de convaincre les autres. Les élèves sont ainsi amenés à dépasser le dessin figuratif et le comptage un à un.

Enfin, il importe que le professeur précise qu'il faut réaliser des dessins qui peuvent prendre des formes variées, qu'il n'est pas nécessaire qu'ils soient beaux mais qu'ils doivent contenir certaines informations importantes pour parvenir à la résolution du problème. Progressivement, il amènera au travers des phases de synthèse à faire évoluer ces représentations et les stratégies associées grâce à un travail régulier d'analyse de ces représentations sur l'année.

Le focus « Problèmes de type parties-tout et modélisation par le schéma en barres », page suivante, décrit le principe sous-jacent à la construction du schéma en barres. Il ne s'agit pas de l'imposer en CP et par ailleurs ce n'est pas la seule représentation possible à mobiliser pour le professeur. Toutefois, il est nécessaire que la progressivité de la construction de schémas soit pensée et harmonisée du cycle 2 au cycle 3.

Ce type de schéma en barres va notamment aider les élèves à reconnaître les structures mathématiques des problèmes, les opérations et procédures sous-jacentes grâce à l'analogie visuelle entre les représentations schématiques utilisées.

Un grand avantage de cette modélisation réside dans le fait que les problèmes basiques peuvent ainsi prendre la même forme schématique et correspondre au même « modèle ». Par exemple, les quatre problèmes suivants[40] se ramènent au même type de schéma.

1. *Léo et Lucie ont 43 billes à eux deux. Léo a 6 billes. Combien Lucie a-t-elle de billes ?*

2. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 6 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

3. *Lucie avait 43 billes ce matin. Elle a perdu 37 billes pendant la récréation. Combien a-t-elle de billes maintenant ?*

4. *Lucie a gagné 6 billes à la récréation. Maintenant elle a 43 billes. Combien de billes avait-elle avant la récréation ?*

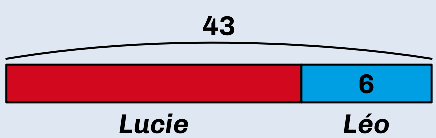


Figure 32. Problème 1.

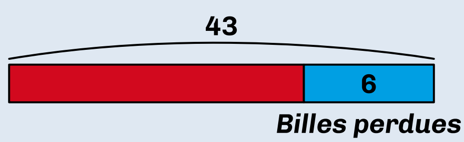


Figure 33. Problème 2.

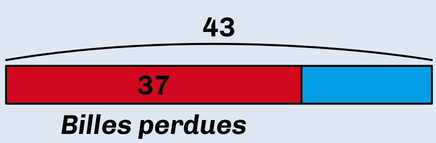


Figure 34. Problème 3.

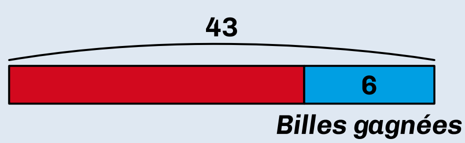


Figure 35. Problème 4.

40 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

Focus | Problèmes de type parties-tout et modélisation par le schéma en barres

En relation avec la décomposition/recomposition des nombres travaillés en maternelle puis en début d'année, les problèmes additifs sont les premiers que les élèves rencontrent au CP.

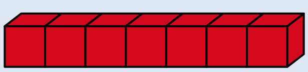
Il est important de faire travailler les élèves d'abord dans le cadre de problèmes additifs simples (de type partie 1 + partie 2 = tout) sur des nombres de petites tailles, en lien avec l'apprentissage de la numération et de l'addition, pour construire le sens de l'opération et installer des automatismes ainsi que le lien naturel entre les nombres.

En s'appuyant sur le matériel manipulé en maternelle (cubes emboîtables), les problèmes de parties-tout se modélisent progressivement avec des schémas en barres. Les cubes (de couleur) emboîtés deviendront, par un travail d'appropriation pas à pas, les barres rectangulaires dans un schéma.

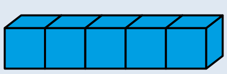
UN EXEMPLE DE PROBLÈME ET DE MODÉLISATION PROGRESSIVE PAR LE SCHÉMA EN BARRES

➔ *« Léo a 7 billes rouges et 5 billes bleues. Combien Léo a-t-il de billes en tout ? »*

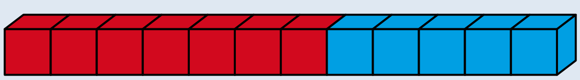
La résolution de ce problème à l'aide de 7 cubes rouges :



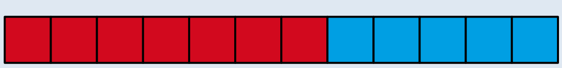
et 5 cubes bleus :



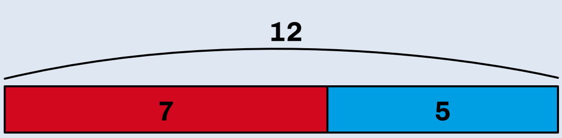
fait apparaître l'assemblage :



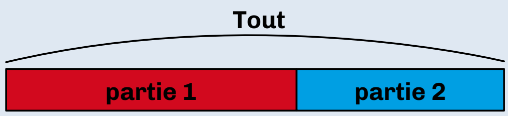
puis le schéma :



et enfin le schéma en barres :



Il correspond au schéma générique suivant :



Point de vigilance : le professeur introduira très progressivement la modélisation par le schéma en barres qui est une étape vers le mode symbolique (écriture mathématique) en s'appuyant sur les étapes décrites au paragraphe intitulé « Vers l'abstraction : de la manipulation à la représentation symbolique en passant par la verbalisation », p. 82, et en faisant référence aux situations de manipulation précédentes.

Le professeur part du matériel manipulé dans la phase de recherche (cubes emboîtables, réglettes, matériel multibase), explicite l'analogie entre les rectangles dessinés pour chaque partie et le nombre de cubes ou réglettes utilisés pour représenter les données numériques.

La modélisation par le schéma en barres est introduite par l'enseignant lors de la mise en commun : le schéma permet de représenter visuellement le raisonnement et « *de réunir les problèmes dans des catégories aussi larges que possible en faisant des analogies, par exemple, entre les problèmes pouvant s'appuyer sur les mêmes représentations* »[41]. Le professeur raconte « l'histoire » du problème en prenant appui sur le schéma. Il met en mots la relation entre les nombres et l'opération qui conduit au calcul.

Ces automatismes additifs installés vont rendre l'introduction de la **soustraction** naturelle. La soustraction est modélisée par le même schéma que la situation additive, mais pour la recherche d'une partie alors que le tout est connu :

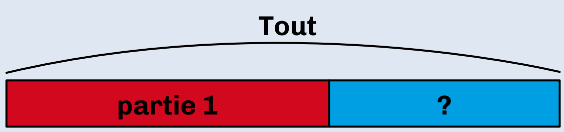


Figure 36. Modélisation d'une situation soustractive par un schéma en barres.

41 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes du champ multiplicatif du CP reposent sur des valeurs numériques adaptées aux procédures des élèves : matériel tangible, représentation imagée, modélisation, calcul (addition itérée, par exemple).

Ces problèmes permettent de construire le sens de la multiplication et de la division. Ils correspondent aux situations (de parts égales) où on cherche : le tout (multiplication), la valeur d'une part (partage/partition), le nombre de parts (quotition).

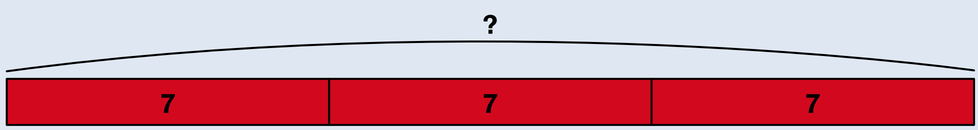
Exemples (respectifs) :

— « *Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?* »
— « *Trois enfants se partagent 18 images. Combien d'images aura chaque enfant ?* »
— « *Il y a 24 élèves dans la classe. Pour participer à un tournoi de sport, le professeur constitue des équipes de 4 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* »

Au CP, l'approche privilégiée sera la manipulation ; les représentations imagées resteront proches de la situation et permettront de rencontrer des **configurations rectangulaires** propices à la construction du concept de multiplication et de division. Ici, le matériel, comme des « tablettes de chocolat sécables »[42] permet de traiter aisément cette situation. Pour l'approche symbolique, les élèves pourront recourir à l'addition itérée.

Exemple : « *Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y a-t-il de biscuits en tout ?* »

En réunissant les cubes dans des barres de 7, le professeur peut proposer le schéma en barres suivant qui permet de voir 3 fois 7 :



Un fait mathématique important à souligner par le professeur auprès des élèves lors de l'enseignement de la résolution de problèmes multiplicatifs est la « symétrie » qui existe entre les problèmes multiplicatifs et les situations de partage. Les problèmes de quotition (recherche du nombre de parts) sont souvent plus difficiles à résoudre que les problèmes de partage (recherche de la valeur d'une part). Un des objectifs importants pour le cycle 2 est de faire comprendre le lien entre ces deux types de problèmes qui relèvent de la même opération.

42 — Tablette de 18 présentée sous la forme rectangle : 1 x 18, 2 x 9, 3 x 6. Ces tablettes se forment facilement avec des cubes emboîtables dans deux directions.

Quelques éléments du continuum didactique au cycle 2 et au cycle 3

L'enseignement de la résolution de problèmes doit être pensé dans une construction pluriannuelle cohérente et progressive. La note de service sur la résolution de problèmes[43] rappelle qu'il s'agit de mettre en place un enseignement construit pour développer l'aptitude des élèves à résoudre des problèmes. Cela nécessite de conduire, année après année, et dès le plus jeune âge, un travail structuré et régulier.

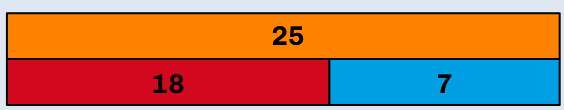
Des propos abordant le continuum didactique de l'enseignement de la résolution de problèmes du cycle 2 au cycle 3 sont forcément denses et volumineux, car la résolution de problèmes traverse de nombreux champs des mathématiques et se retrouve à chaque niveau de classe.

Nous présentons ici brièvement quelques points qui éclairent ce continuum sans être des objectifs d'enseignement au CP.

Le sens des opérations et la « symétrie » entre les opérations

Un des objectifs du cycle 2 est de faire acquérir la compréhension de la symétrie entre addition et soustraction d'un point de vue abstrait des relations arithmétiques entre les nombres : par exemple, comprendre que les deux opérations « 25 – 7 = 18 » ou « 25 – 18 = 7 » découlent – par définition même – de la relation additive entre ces 3 nombres : « 18 + 7 = 25 ».

Cette symétrie peut s'exprimer au travers de schémas avec deux barres, permettant de percevoir les relations entre les trois nombres en jeu.



L'explicitation de cette symétrie, qui doit être travaillée avec les élèves d'abord sur des petits nombres (exemple : compléments à 10, compléments à 20, puis généralisation en étendant le domaine numérique), va leur permettre à la fois une meilleure compréhension du sens des opérations mais aussi va renforcer la compréhension des relations numériques et des automatismes de calcul liés aux décompositions des nombres.

43 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

Lien avec la comparaison

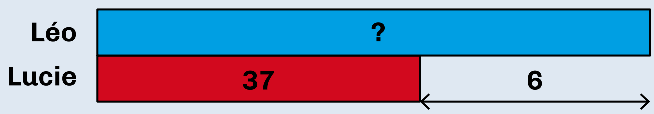
Les problèmes de comparaison sont plus difficiles. Un problème de comparaison fait appel aux formulations spécifiques « de plus » et « de moins » qui sont source de difficultés pour les élèves.

Pour résoudre ce genre de problèmes, il est important de répondre avant toute chose à une question du type « qui est le plus grand, qui en en a le plus », etc.[44]

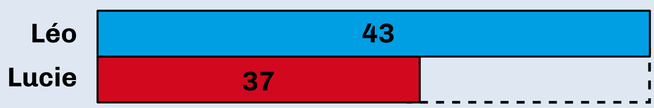
Cette première étape permet de travailler ensuite les problèmes similaires à celui-ci :

Exemple : « *Lucie a 37 billes. Léo a 6 billes de plus que Lucie. Combien de billes a Léo ?* »

Ce problème peut être traité au CP en s'appuyant sur la numération avec la représentation en barres de 10 et des cubes unité.



À partir du CE1, la modélisation par le schéma en barres va permettre tout au long des cycles 2 et 3 de visualiser les quantités en jeu : représenter la grande quantité, matérialiser éventuellement la différence et se ramener par la suite à des problèmes de parties-tout[45] :



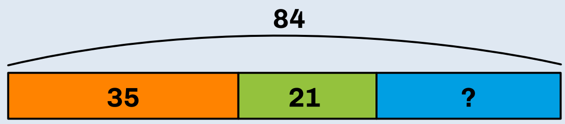
Ces modélisations ramèneront toutes les situations rencontrées dans la classification des problèmes arithmétiques élémentaires à un raisonnement unique sur des quantités positives[46].

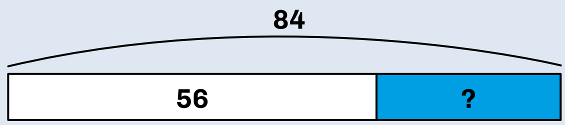
Résoudre des problèmes complexes

La modélisation installée pour les schémas parties-tout donne une stratégie d'enseignement pour apprendre à résoudre des problèmes à deux étapes en les ramenant explicitement et visuellement à des problèmes en une étape.

44 — Par exemple : « *Léo a 37 billes, Lucie en a 43. Qui en a le plus ?* »
45 — Cette démarche permet de ne raisonner que sur des quantités positives.
46 — Par exemple, on transforme un problème du style - a + c = b en a + b = c.

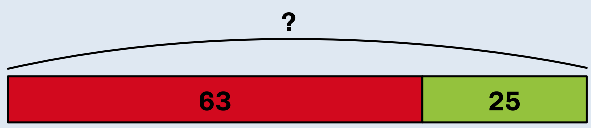
Exemple 1 : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 84 livres. Il y a 35 albums, 21 bandes dessinées. Les autres sont des livres documentaires. Combien y-a-t-il de livres documentaires ?* »



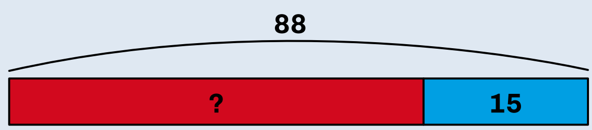


Exemple 2 : « *Dans la bibliothèque de la classe, il y a 63 livres. Le professeur en apporte 25 de plus. Les élèves en empruntent 15. Combien y a-t-il alors de livres dans la bibliothèque de la classe ?* »

- **Étape 1 :** 25 livres de plus dans la bibliothèque



- **Étape 2 :** on emprunte 15 livres

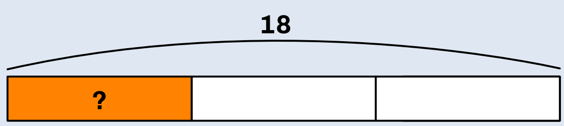


Lien avec l'introduction ultérieure de la fraction

En guidant la démarche à l'aide de la manipulation de cubes, il est possible pour le professeur de présenter un schéma multiplicatif lors d'une situation de partage.

Exemple 1 : « *3 enfants se partagent 18 images* [donner ces images]. *Combien d'images aura chaque enfant ?* » (CP)

Exemple 2 : « *Paul a 18 billes. Il en donne un tiers à Julie. Combien de billes Julie reçoit-elle ?* » (Cycle 3)



De même, on obtient un schéma similaire au cycle 3 dans l'exercice suivant : « *Construis un rectangle et colorie un tiers du rectangle* ».

Les écrits en résolution de problèmes et l'importance de l'institutionnalisation

La démarche de résolution de problèmes s'appuie sur différents moments – manipulation active, verbalisation, représentation de la situation – qui participent à la modélisation.

Tout au long de la démarche, les écrits de différentes natures mis en place par le professeur accompagnent l'activité des élèves et structurent le vécu commun de la classe. Un travail progressif doit débuter dès le CP quant à la production d'une trace écrite attendue en résolution de problèmes : schéma éventuel, calcul en ligne ou posé, phrase d'explicitation ou de conclusion.

Les supports des élèves

Très (et même trop) souvent, la résolution de problèmes ne laisse pas de trace exploitable durablement (ardoise, feuilles volantes).

CAHIER PERSONNEL

Pour éviter l'écueil de l'écrit éphémère, la résolution de problèmes doit être traitée dans un cahier personnel (cahier du jour, cahier spécifique aux mathématiques, etc.). Il permet à l'élève de conserver la trace des résolutions avec ses essais-erreurs, ses procédures, ses modes de représentation. Il constitue également une mémoire des problèmes rencontrés. Il facilite la conduite d'entretiens avec l'élève, pour l'aider à verbaliser, à prendre conscience de ses progrès et notamment à se situer par rapport à ce qui est attendu.

CAHIER DE RÉFÉRENCE EN MATHÉMATIQUES[47] (cahier de leçons)

Il correspond au support complémentaire et indispensable pour structurer un enseignement explicite de la résolution de problèmes. On y trouve les écrits formalisés par le professeur avec les élèves lors de la phase d'institutionnalisation. Ces écrits constituent les traces des savoirs et des compétences travaillés.

Les outils collectifs

Le support collectif fait le lien entre les écrits individuels du cahier personnel et les écrits structurés du cahier de référence.

47 — Note de service n° 2018-051, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

L'affiche constitue un écrit de référence du vécu commun de la classe : il doit être lisible, clair et succinct. L'affiche met en lumière les étapes de la résolution de problèmes : de l'énoncé en langage naturel, à la modélisation en langage mathématique en passant par des représentations schématiques (cf. figure 37).

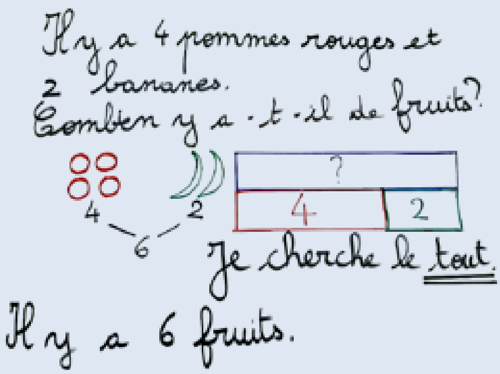


Figure 37. Exemple de bilan de savoir constitué sous forme d'affiche de classe de début de CP.

Les affiches collectives correspondent aux problèmes de référence rencontrés.

Pour l'élève, l'affiche fournit un point d'appui, un aide-mémoire des procédures de raisonnement et un modèle.

Pour le professeur, elle constitue un support pour formaliser, guider le raisonnement des élèves, et favoriser les analogies avec les problèmes antérieurs. Elle constitue une référence dans les phases d'entraînement (« *c'est comme le problème de…* »).

Les problèmes dits basiques seront tout particulièrement concernés par ces écrits de référence.

Enfin, l'affichage de classe évolue au cours de l'année : dans les deux premières périodes, les affiches sont présentes pour guider les élèves dans l'acquisition de la démarche de résolution des problèmes. En cours d'année, il conviendra de les compléter ou de les faire évoluer.

Le rôle essentiel de l'institutionnalisation

L'institutionnalisation correspond à un processus à deux niveaux :

— Des **mises en commun** menées durant la séance (et pas seulement en fin de séance) pour garantir l'engagement et la compréhension de tous les élèves.

— L'**institutionnalisation finale** qui renvoie aux problèmes travaillés et aux stratégies développées à l'issue d'une séquence d'apprentissage. Cette phase permet de structurer la trace d'un savoir partagé.

Parler de références « construites avec les élèves » ne signifie en rien qu'il s'agit de productions imparfaites ; il s'agit bien au contraire de modèles dont les élèves pourront s'inspirer pour leurs propres travaux. Ces exemples-types doivent servir de références systématiques lors des résolutions de problèmes ultérieures (« *c'est comme…* »). Idéalement, ces références seront communes à l'école, voire au réseau d'écoles, pour permettre de les utiliser pendant plusieurs années[48].

48 — Note de service n° 2018-052, Bulletin officiel spécial n° 3 du 5 avril 2018.

En résumé

- Il s'agit **d'enseigner la résolution de problèmes**. L'enseignement explicite de la résolution de problèmes s'appuiera sur des temps d'institutionnalisation guidés par le professeur qui permettront de hiérarchiser les procédures en prenant en compte leur efficacité et leur économie. **L'objectif n'est cependant pas d'enseigner une typologie de problèmes.**

- L'enjeu est de permettre aux élèves de réussir **seuls** les problèmes arithmétiques relevant du CP en enrichissant la mémoire des problèmes de chacun [49]. Le temps consacré à la résolution des problèmes basiques doit donc être conséquent et régulier. Il importe aussi de proposer des problèmes à deux étapes (problèmes complexes).

- Le triptyque « **manipuler, verbaliser, abstraire** » offre des repères pour concevoir l'enseignement de la résolution de problèmes. L'articulation entre matériel, représentations associées et les notions mathématiques convoquées est essentielle. Il convient donc à ce titre de privilégier dès le CP des matériels décontextualisés tels que les cubes emboîtables.

- Articuler représentation et modélisation : l'appui dès le CP sur des représentations à l'aide de schémas (notamment des schémas en barres) pourra faciliter l'accès à la modélisation et préparer un continuum didactique du cycle 2 au cycle 3 pour l'enseignement de la résolution de problèmes.

49 — *Ibid*, p. 80, note 33.

Quels matériels et pour quelle utilisation en mathématiques au CP ?

La mesure 4 du rapport Villani-Torossian, *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*[50], rappelle l'importance d'un équipement des écoles en matériels de base, accompagnés de tutoriels et favorisant les manipulations.

Ce chapitre fait une synthèse des différents matériels évoqués précédemment et pouvant être exploités en classe, de façon individuelle ou collective, pour permettre les apprentissages des élèves en numération, en calcul ou en résolution de problèmes.

Le chapitre 5 revient sur l'importance du jeu dans l'enseignement et illustre, par une analyse didactique, l'intérêt de certains jeux pour développer les apprentissages mathématiques.

Les matériels utiles dans l'apprentissage des mathématiques

Le choix du matériel s'inscrit dans le travail de conception initial du professeur. Les étapes de la séquence d'apprentissage (introduction de la notion, institutionnalisation du savoir, réinvestissement des connaissances et évaluation) doivent être anticipées par le professeur avant même le choix du matériel. Bien que correspondant à une variable d'apprentissage, le fait d'utiliser du matériel ne permet pas en soi de construire la notion recherchée ; l'objectif pour le professeur est de proposer une situation de manipulation offrant la possibilité à l'élève de construire la notion.

Choix du matériel

Le professeur doit être attentif au choix du matériel en fonction de critères didactiques explicites et en cohérence avec l'usage souhaité. Forme, taille, couleur doivent être considérées comme des **variables didactiques**. Pour des questions esthétiques, les éditeurs proposent des couleurs variées pour le matériel accompagnant les manuels ;

50 — https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242

matériel qui est souvent repris en classe par les professeurs. Or, ce foisonnement de couleurs non seulement n'apporte pas toujours une plus-value, mais peut nuire à la compréhension des notions en jeu en détournant l'élève des objectifs d'apprentissage visés (cf. paragraphe « Étude concernant le choix du matériel » ci-dessous). Cependant, si les caractéristiques du matériel utilisé peuvent être un obstacle à la compréhension de l'élève, elles peuvent également devenir un paramètre à exploiter à des fins mathématiques.

Proposé individuellement, le matériel est utilisé par l'élève comme une entrée concrète liée à la notion travaillée. Afin de mettre en œuvre effectivement la manipulation souhaitée par le professeur, le matériel doit être disponible en quantité suffisante pour une mise à disposition auprès de chaque élève ou éventuellement par binôme. L'exploration et l'expérimentation sont les actions effectuées par les élèves et attendues par le professeur. Cet usage sera recherché dans les phases d'introduction, d'entraînement de la notion et également pour la différenciation.

Proposé collectivement, le matériel permet d'illustrer un propos, une manipulation que le professeur souhaite présenter ou mettre en lumière. Une version agrandie du matériel individuel pourra être proposée pour permettre une meilleure visualisation lors des phases de mise en commun et de synthèse. L'usage collectif sera recherché dans les phases de verbalisation, d'explicitation et également pour la validation.

ÉTUDE CONCERNANT LE CHOIX DU MATÉRIEL

De récentes recherches en sciences cognitives[51] ont mis en évidence quatre principes généraux d'utilisation de matériel en mathématiques susceptibles de favoriser les apprentissages. Le terme « matériel » désigne tout objet physique utilisé pour l'apprentissage des mathématiques[52] (par exemple, des jetons, des tangrams, des réglettes © Cuisenaire, etc.). Les auteurs précisent que ce matériel n'est donc qu'une représentation d'un concept mathématique (ou d'une partie d'un concept) et non le concept lui-même. Les principes d'utilisation de matériel reposent sur l'importance de faire des liens entre le matériel et le concept qu'il représente[53]. Ces principes sont explicités ci-après puis illustrés avec des exemples dans le paragraphe de ce chapitre intitulé « Matériels incontournables devant être mis à disposition des élèves dans les classes », p. 107.

51 — Voir Kira Carbonneau, Scott C. Marley, James P. Selig, « A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives », *Journal of Educational Psychology*, 2013, et Elida V. Laski, Jamilah R. Jor'dan J., Carolyn Daoust, Angela K. Murray, « What makes mathematics manipulatives effective ? Lessons from cognitive science and Montessori education », 2015 : https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/2158244015589588

52 — En anglais, les auteurs utilisent le terme *manipulative* pour désigner ce matériel et le terme *concret* pour spécifier son caractère physique.

53 — Traduction française de : *make the relation between the concrete material and the mathematics concept it represents.*

- Le premier principe concerne **le temps d'utilisation d'un matériel**. Pour avoir des effets sur les apprentissages, **l'utilisation d'un matériel doit être régulière, constante et sur une longue période** (supérieure à un an). Cette exposition longue et répétée permettrait aux enfants de mieux identifier et comprendre la relation entre le concept et le matériel qui le représente.
- Le deuxième principe concerne **la transparence du matériel utilisé** : plus les représentations proposées sont proches physiquement du concept à étudier, plus les enfants seront capables de comprendre la relation entre eux. Pour l'apprentissage, il s'agirait ainsi de **commencer par des représentations figuratives et d'avancer petit à petit vers des représentations plus abstraites** d'un même concept.
- Le troisième principe concerne la **nature du matériel**. Si celui-ci est un objet utilisé à d'autres fins, il pourrait détourner, voire empêcher l'apprentissage. En effet, un matériel qui donnerait envie de jouer pourrait distraire et empêcher l'enfant de faire des liens entre l'objet et le concept mathématique qu'il représente. Au contraire, un matériel plus sobre pourrait aider l'enfant à diriger son attention directement sur les liens entre l'objet et le concept représenté. Ainsi il conviendrait **d'éviter l'utilisation d'un matériel qui ressemble trop à des objets de la vie de tous les jours** ou qui ont des caractéristiques qui pourraient détourner les enfants de l'objectif d'apprentissage visé.
- Le quatrième principe concerne **l'explicitation du lien entre le matériel et le concept qu'il représente**. Les enfants ont des difficultés à extraire eux-mêmes la signification abstraite d'un symbole. **L'explicitation par le professeur permet à l'enfant de diriger son attention directement vers les caractéristiques pertinentes du matériel**, c'est-à-dire l'aspect mathématique sur lequel on veut travailler.

Les outils et logiciels du numérique éducatif

L'usage des outils numériques est souvent cantonné dans des dimensions pédagogiques et la dimension didactique n'est pas suffisamment exploitée pour donner la pleine puissance de ces outils.

Parmi les matériels numériques, les tableaux blancs interactifs permettent d'utiliser, sur un même support, diverses ressources multimédias : textes, images, sons, vidéos, animations 2D et 3D, exercices, éléments de réalité augmentée et réalité virtuelle, jeux sérieux. Ils permettent de garder en mémoire les différentes procédures que les élèves ont écrites ou verbalisées et sur lesquelles les élèves et les professeurs peuvent revenir (comparaison, recherche d'erreurs, etc.). Ils offrent une dimension collective intéressante, complémentaire du matériel individuel[54].

Les tablettes numériques ou les ordinateurs offrent les mêmes possibilités techniques mais permettent un travail plus individualisé ou plus coopératif.

54 — Voir par exemple https://micetf.fr/ (et plus particulièrement https://micetf.fr/numop pour le lien avec le matériel de numération utilisé individuellement en classe). Le portail Prim à bord sur Éduscol (https://eduscol.education.fr/cid96257/prim-a-bord-le-portail-premier-degre.htm) propose de nombreux articles concernant l'utilisation des TNI (ou TBI).

Parmi les applications ou logiciels fonctionnant avec ces matériels, les jeux numériques occupent une place croissante[55]. En fournissant un retour visible sur les choix, le parcours et les stratégies de l'élève, ils favorisent le travail en autonomie et permettent d'identifier les réussites, d'orienter vers de nouveaux objectifs, de différencier les apprentissages, de développer les habiletés et de reformuler le savoir accumulé.

On trouvera sur le site du *Freudenthal Institute* des ressources en anglais[56] particulièrement intéressantes.

On peut citer d'autres exemples de jeux comme Calcul@tice[57], L'Attrape-nombres[58] et la Course aux nombres[59].

Enfin, le Partenariat d'innovation et intelligence artificielle (P2IA)[60] vise le développement de solutions s'appuyant sur les techniques d'intelligence artificielle pour permettre aux enseignants de mieux accompagner leurs élèves dans leurs apprentissages des mathématiques et du français au cycle 2.

Matériels incontournables devant être mis à disposition des élèves dans les classes

Pour illustrer les différents principes présentés, nous faisons le choix de proposer des matériels indispensables au CP pour l'enseignement des deux systèmes de numération (orale et écrite chiffrée), du calcul et de la résolution de problèmes. Peu nombreux, ils sont des références pour la plupart des activités mathématiques mettant en jeu les nombres. Dans le paragraphe suivant, d'autres matériels, moins essentiels mais complémentaires aux premiers, seront présentés.

55 — Voir par exemple la liste proposée par la Délégation académique au numérique éducatif (Dane) d'Aix-Marseille, « Panorama des outils numériques au service des apprentissages » : https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/jcms/c_10637631/fr/panorama-des-outilsnumeriques-au-service-des-apprentissages
56 — http://www.fi.uu.nl/publicaties/subsets/html5_en/
57 — Calcul@tice propose aux élèves de CP (et au-delà), en travaillant seul ou par deux, de résoudre une série d'épreuves en lien avec le calcul mental. Cet outil propose en outre une possibilité de parcours adaptés en fonction des difficultés des élèves : https://calculatice.ac-lille.fr/spip.php?rubrique1
58 — Conçu par l'unité Inserm-CEA de neuro-imagerie cognitive : http://www.attrape-nombres.com/an/home.php
59 — http://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php
60 — https://eduscol.education.fr/cid118880/partenariat-d-innovation-et-ia.html

Les équipes de cycle 2 veilleront à disposer d'un **matériel de numération de référence** permettant de travailler, sur l'ensemble du cycle, la numération écrite chiffrée (dans son aspect décimal et son aspect positionnel) et la numération orale. Ce matériel, vecteur d'images mentales, servira de support à la plupart des activités de numération et calcul proposées en classe. Au fil de l'année, il pourra être complété par d'autres matériels, dont le lien sera explicitement fait avec le concept qu'ils représentent, tout comme avec le matériel de référence.

Cubes emboîtables sécables

Le fait qu'ils soient emboîtables et sécables permet de constituer des groupements mais aussi de les défaire, ce qui est particulièrement intéressant pour favoriser la compréhension du sens des écritures en chiffres et des techniques de calcul.

— **Pour la numération écrite chiffrée et la numération orale** : l'utilisation de ce type de cubes, avec une même couleur, notamment au début de l'apprentissage, permet de conceptualiser une dizaine sous la forme d'un groupement de 10 unités (une barre de 10 cubes identiques en les emboîtant), mais aussi sous la forme de 10 unités isolées (avec l'éventuelle possibilité de casser une barre dizaine en 10 cubes).

Figure 38. Illustrations de 34 unités = 14 unités 2 dizaines = 3 dizaines 4 unités.

Comme le montrent les illustrations ci-dessus, une même collection peut être représentée de façon désorganisée, semi-organisée (une dizaine de cubes est néanmoins prête à être assemblée sur la photo 2) ou complétement organisée.

— **Pour le calcul** : en lien avec le contenu du chapitre 2, ce type de matériel peut être exploité pour comprendre la technique opératoire de l'addition posée en colonnes puisqu'il permet de matérialiser les groupements par 10 ; dans ce cas, il s'avère intéressant d'utiliser des collections de cubes de couleurs différentes, chacune représentant un des termes de la somme. Par exemple, pour calculer 27 + 18 = 45 :

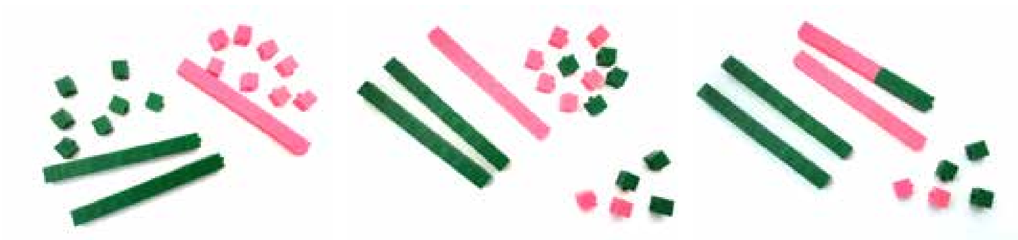


Figure 39. Illustration de 27 + 18 = 45.

Par la suite, après le CP, ce matériel se révélera aussi indispensable pour l'apprentissage d'une technique de soustraction.

— **Pour la résolution de problèmes arithmétiques :** de tels cubes peuvent aussi être utilisés pour construire le sens de l'addition et de la soustraction et pour amener à une schématisation des problèmes par un modèle en barres (cf. chapitre 3) ; le caractère sécable et emboîtable des cubes est ici fondamental.

La frise numérique

Disposée en ligne (lecture gauche/droite), elle est un des éléments incontournables à mettre en place dans la classe de CP afin d'observer les régularités de la suite orale ou écrite des nombres.

— **Pour travailler la numération orale :** une frise numérique affichée en ligne sur les murs de la classe peut faire apparaître la petite et la grande comptine (cf. paragraphe intitulé « Lire et écrire les nombres », chapitre 1, p. 37).

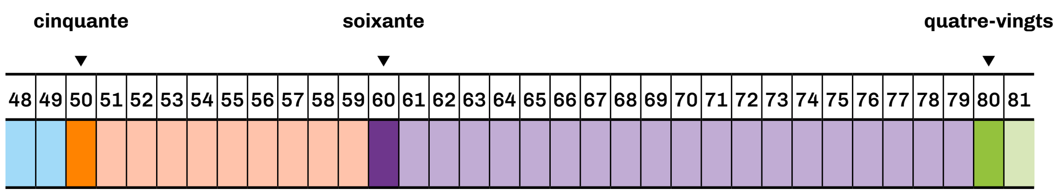


Figure 40. Exemple d'une frise numérique faisant apparaître petite et grande comptines.

Elle peut aussi servir de support pour construire ou valider certains résultats ; par exemple, le résultat de « huit plus quatre » peut se retrouver sur la frise en se plaçant sur la case « 8 » puis en se déplaçant de 4 cases vers la droite. Toutefois, l'emploi de la frise numérique en calcul mental doit être pensé dans une progression adaptée pour ne pas encourager et entretenir des procédures de comptage.

La frise collective affichée sur les murs de la salle de classe peut être construite au fur et à mesure de la progression sur la numération orale (cf. chapitre 7). Ce support collectif peut être complété avec profit par un matériel individuel en taille réduite permettant à chaque élève de comprendre le fonctionnement d'une telle frise (code couleur, déplacement, utilisation pour donner le nom du nombre). En termes de différenciation, ce matériel peut aussi être mis à disposition d'élèves présentant des difficultés dans la numération orale.

— **Pour travailler la numération écrite chiffrée :** une deuxième frise peut être construite avec les élèves et affichée en classe afin de faire le lien entre l'écriture chiffrée, la quantité et l'organisation d'une collection en dizaines et unités ; il est aussi possible d'y ajouter des écritures en unités de numération comme dans la figure 41, page suivante (à condition qu'un travail spécifique sur les conversions ait été fait au préalable, par exemple : 47 = 4 dizaines 7 unités = 3 dizaines 17 unités).

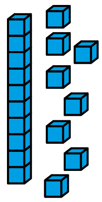
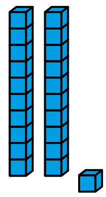
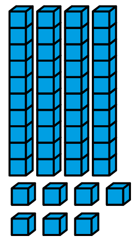
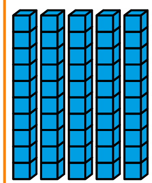
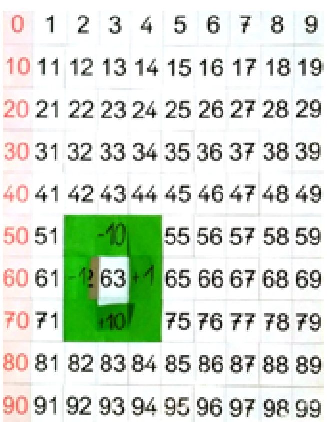
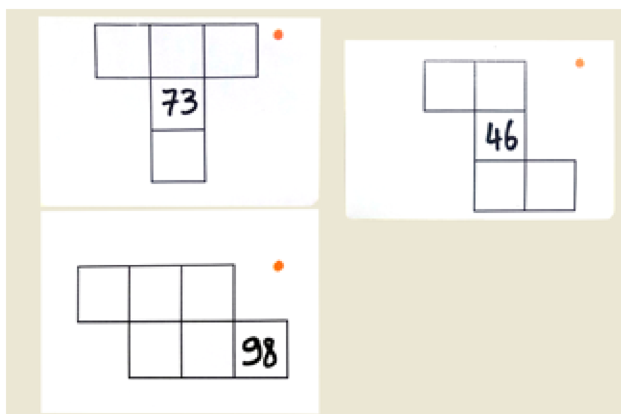
...	18	19	20	21	...	47	48	49	50	...
	 **18 u** 1 d + 8 u 8 u + 1 d			 **21 u** 2 d + 1 u 1 u + 2 d		 **47 u** 4 d + 7 u 7 u + 4 d 17 u + 3 d			 **50 u** 5 d	

Figure 41. Autre exemple de frise numérique, pour travailler la numération écrite chiffrée.

Tableau des nombres

Cet outil met en lumière les régularités du système de numération écrite chiffrée.





Figures 42 et 43. Exemples de tableaux des nombres.

Des jeux de portraits, des activités de tableau à compléter (quelques cases vides, certaines lignes, des extraits du tableau, etc.), des puzzles permettent également de travailler sur les écritures chiffrées.

Le tableau des nombres permet aussi d'utiliser l'itération de l'unité pour écrire le précédent ou le suivant d'un nombre. Il permet de travailler des tâches telles que : 56 + 10 ; 34 et une dizaine ; 12 + 1 ; 82 – 1 (avec usage d'un curseur tel que sur la figure 42).

En classe, les échanges oraux risquent de s'effectuer avec le nom des nombres. Les activités telles que les devinettes de nombres cachés sous des cases masquées qui s'appuient sur le nom des nombres sont à proposer une fois que les deux systèmes de numération sont bien installés.

Matériels complémentaires pouvant être mis à disposition des élèves

Les exemples ci-dessous répertorient d'autres matériels fréquemment rencontrés dans les classes en complément de ceux présentés précédemment, en identifiant leur intérêt et leurs limites.

Complémentaires, mais moins indispensables que les matériels du paragraphe précédent, ils pourront être exploités par les professeurs notamment dans des phases de remédiation. De façon générale, d'autres matériels comme les réglettes © Cuisenaire, les cartes à points, les compteurs pourront venir enrichir les enseignements en classe de CP.

Leur utilisation n'a de sens que si elle est mise en place sur la durée et définie de façon précise au sein d'une progression de cycle. Ce n'est que dans ces conditions qu'ils peuvent être un appui complémentaire à la construction des concepts mathématiques abordés.

EXEMPLE 1. MATÉRIEL DE NUMÉRATION EN BASE 10/MULTIBASE (CUBE UNITÉ, BARRE DIZAINE)

DESCRIPTION

Les proportions entre la barre dizaine et 10 cubes unités sont respectées, 10 cubes unités formant une dizaine.

À la différence des cubes emboîtables et sécables, ce matériel ne permet pas d'assembler dix cubes épars en un même objet (une barre « dizaine ») ni de « casser » une dizaine en dix cubes. Cependant ce matériel permet de faire des échanges.

INTÉRÊT ET/OU LIMITES

Une des dérives observées dans l'utilisation du matériel multibase consiste à limiter l'activité à un nombre d'unités et de dizaines inférieure à 10.

PROGRESSION

Pour éviter l'écueil cité ci-dessus, il conviendra de proposer régulièrement aux élèves des collections où le nombre d'unités sera supérieur à 10 afin d'occasionner des groupements, comme le montre l'exemple d'une collection semi-groupée (figure 44, p. suivante).

Figure 44. Collection de 5 dizaines et 13 unités.

Figure 45. Groupement et échange des unités pour obtenir 6 dizaines et 3 unités.

Lorsque les élèves ont compris la notion de dizaine, ce matériel peut être support aux mêmes types de tâches de numération et de calcul que les cubes sécables. **Il ne doit cependant pas intervenir au début de l'apprentissage.**

EXEMPLE 2. TABLEAU DE NUMÉRATION

dizaines	unités
d	u

DESCRIPTION

Il organise l'écriture en chiffres du nombre en répartissant un chiffre dans chacune des colonnes.

INTÉRÊT ET/OU LIMITES

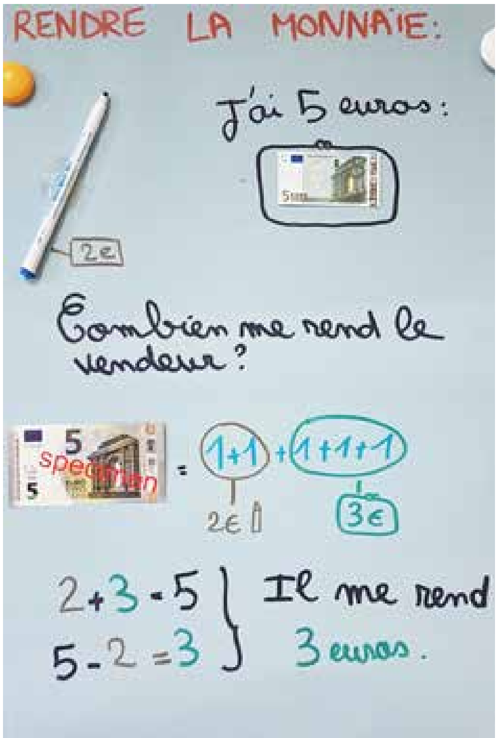
Le passage à l'unité de rang supérieur est pris en charge par le passage d'une case à la suivante. L'inconvénient majeur de cet outil est qu'il ne permet pas d'aborder l'aspect décimal de la numération écrite chiffrée et qu'il enferme le nombre dans des cases sans lui donner du sens.

Il prend du sens pour les additions posées : lorsque l'on dépasse 10 unités, on ajoute une dizaine dans la colonne de gauche.

PROGRESSION

Il est clairement recommandé de ne pas introduire trop précocement le tableau de numération, voire de s'en passer en CP. En effet, trop souvent, les activités de classe conduisent à le remplir de façon mécanique sans qu'aucun sens ne soit donné aux chiffres composant l'écriture du nombre. Ce tableau est destiné à être enrichi au fil des apprentissages du cycle 2 par des colonnes à gauche de celle des centaines puis au cycle 3 à droite de celle des unités pour le fractionnement de l'unité en dixièmes, centièmes, millièmes. Une analogie avec les différents tableaux de conversion rencontrés par les élèves dans leur scolarité pourra être effectuée au-delà du cycle 2.

EXEMPLE 3. LA MONNAIE



DESCRIPTION

Elle peut s'utiliser après la construction de la numération. Elle permet de faire fonctionner le nombre dans un contexte particulier et familier aux élèves.

Elle exploite la numération écrite chiffrée dans un contexte plus complexe puisqu'à la fois il y a des billets et des pièces qui ne sont pas que dans 1, 10, 100.

INTÉRÊT ET/OU LIMITES

Limitée pour l'apprentissage de la numération écrite chiffrée, elle prend en charge la valeur et les échanges se font avec plusieurs groupements.

Ce matériel n'est pas un outil « transparent physiquement » : un billet de dix n'est pas l'assemblage physique de dix pièces de un.

Elle trouve son principal intérêt dans la résolution de problèmes liés à des contextes de coût, d'achats, etc.

PROGRESSION

La monnaie présente l'avantage de proposer l'introduction d'un matériel numérique concret, signifiant d'un point de vue social, et pour lequel les éléments seront introduits en fonction du champ numérique travaillé. Par exemple, au CE1, on pourra retrouver les billets de 100 euros et les centimes d'euros.

En résumé

- L'utilisation de matériel doit être régulière et constante sur une longue période. Le matériel doit être le plus transparent possible, il ne doit pas ressembler à des objets de la vie courante et le lien qui le lie avec le concept qu'il représente doit être explicité par l'enseignant.

- Les cubes emboîtables sécables, la frise numérique ainsi que le tableau des nombres sont considérés comme des matériels incontournables devant être mis à la disposition de chaque élève pour qu'il les utilise de façon individuelle.

- D'autres matériels, comme des compteurs, du matériel multibase, de la monnaie ou encore des tableaux de numération peuvent aussi être proposés aux élèves, en complément des matériels cités précédemment.

Le jeu dans l'apprentissage des mathématiques

Les programmes suggèrent d'utiliser le jeu lors de séances de mathématiques. Mentionner le jeu en mathématiques, c'est évoquer le matériel ludique, mais aussi l'attitude ludique du joueur. C'est se poser la question de sa spécificité, en particulier dans sa différence avec l'exercice. C'est aussi pour l'enseignant, viser des apprentissages mathématiques que les élèves-joueurs pourront atteindre dans un contexte de bienveillance et de convivialité, où « respecter autrui » se conjugue avec apprendre à faire des mathématiques ensemble.

Des jeux pour s'entraîner au calcul

Il existe un nombre considérable de jeux sous forme de logiciels numériques pour s'entraîner au calcul. Ils permettent le renforcement des apprentissages du calcul[61] et offrent des possibilités de différenciation automatisée en adaptant les parcours proposés aux élèves comme Calcul@tice[62], Multimaths.net[63], la Course aux nombres[64] et L'Attrape-nombres[65], le jeu des annonces, le jeu de l'estimateur, le jeu du pari[66]. Les jeux traditionnels (non numériques) contribuent aussi à cet objectif.

La liste suivante n'est ni exhaustive, ni limitative.

LE JEU DU LUCKY LUKE[67]

À partir de 3 joueurs, durée inférieure à 5 min.

Il permet de travailler les décompositions additives des nombres jusqu'à 10. Le maître du jeu annonce un mot-nombre et au signal, les joueurs qui ont les mains dans le dos, montrent leurs doigts. De nombreuses variantes sont possibles (par exemple, le maître du jeu montre le nombre avec ses doigts et les joueurs choisissent l'étiquette avec la bonne décomposition).

61 — https://matheros.fr/ ; https://www.mathador.fr/ ; https://www.arcademics.com/
62 — https://calculatice.ac-lille.fr/spip.php?rubrique2
63 — http://www.multimaths.net/index.php?page=primaire_cp
64 — https://www.lacourseauxnombres.com/nr/home.php
65 — http://www.attrape-nombres.com/an/nc_play.php?lang=
66 — Voir Emmanuel Sander, « La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux », A.N.A.E., 156, 611-619, 2018.
67 — Source : *Les Essentielles*, coll. « Ermel », Hatier, CP.

LE BON DÉBARRAS[68]

À partir de 2 joueurs, durée d'environ 10 min.

Il permet de travailler les compléments à 10 à partir de deux cartes ou plus. Le vainqueur est celui qui se débarrasse le plus vite possible de toutes ses cartes. Un simple jeu de cartes suffit en conservant les cartes de 1 à 9 en quatre exemplaires. Chaque joueur reçoit dix cartes qu'il pose à plat de manière visible, le reste non visible constitue le talon. Le premier joueur retourne la première carte du talon et va chercher parmi ses cartes le complément à 10. S'il trouve le complément avec une ou plusieurs de ses cartes, il se débarrasse de celle(s)-ci ; s'il ne le trouve pas, il passe son tour. Le vainqueur est celui qui s'est débarrassé le premier de ses dix cartes.

LES CARTES RECTO VERSO

À partir de 2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.

Sur le recto des cartes figurent les calculs à effectuer, de l'autre côté (verso), les résultats. Les cartes sont étalées sur la table, côté recto visible. Un élève propose une carte-question et l'autre y répond. On retourne la carte ; si la réponse est correcte, l'enfant qui a répondu prend la carte, sinon, c'est celui qui a questionné qui la prend. Les rôles sont inversés à chaque partie. Celui qui a le plus de cartes à la fin de la partie a gagné. Ce jeu peut aussi se fabriquer aisément avec des bouchons de récupération.

LE YAMS

De 2 à 4 joueurs, durée d'environ 15 min.

Il nécessite cinq dés et trois lancers par joueur à chaque tour. Le premier joueur lance les cinq dés, il met de côté les constellations de son choix et relance les autres dés. Chaque trio de lancers conduit les élèves à calculer le total de points et ainsi à mobiliser des calculs de doubles ou autres additions pour compléter sa feuille de jeu.

Le jeu, nécessaire… mais pas suffisant !

Si les contenus des apprentissages en mathématiques sont précisés dans les attendus de fin d'année scolaire et de fin de cycle, qu'en est-il du jeu ? Est-il un outil ou un support pédagogique comme un autre ? En quoi la situation de jeu est-elle proche d'autres situations d'apprentissage mathématique ?

68 — Source : APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public).

Quel que soit le niveau et plus particulièrement dans les classes des cycles 1 et 2, de nombreuses situations sont mises en place sous forme de jeux avec l'idée prégnante que le jeu va permettre d'emblée un investissement des élèves.

Il est judicieux de ne pas minorer l'intérêt ludique du jeu qui amène les élèves à entrer dans un processus d'essais, à échafauder des stratégies, à les reconsidérer, car, d'une certaine façon, ils oublient qu'ils apprennent. Le jeu permet au professeur de se placer en retrait et d'engager les élèves dans une série de situations (jeux) dont l'enjeu est une connaissance partagée.

S'il s'agit d'une situation de découverte, le rôle du professeur est d'orienter l'activité des élèves pour qu'ils parcourent les étapes de la construction d'un savoir. Le jeu met donc en interaction les joueurs (élèves) avec une situation d'apprentissage. Dans un premier temps, les joueurs devront valider ou invalider leurs actions en fonction des interactions avec leurs pairs à propos du jeu ou par la vérification du respect des règles par le professeur. Dans un second temps, la tâche consistera en l'élaboration collective d'un modèle d'action comme stratégie potentiellement gagnante du jeu. Enfin, durant le troisième temps, il s'agira de valider cette stratégie comme susceptible de faire gagner au jeu à coup sûr. Le jeu peut aussi viser le renforcement d'un automatisme (connaissance des tables par exemple) ou le renforcement de notions déjà étudiées (connaissance de la numération en jouant au jeu de l'oie ou à la bataille par exemple).

Les bénéfices du jeu dans les apprentissages sont nombreux, notamment[69] :

— l'évolution du sens donné aux notions mathématiques en manipulant et en se décentrant des objets d'apprentissage ;
— le développement de compétences mobilisant logique, rigueur, concentration, mémoire et capacités d'abstraction ;
— la pertinence d'un outil à différents moments de l'apprentissage : introduction d'une nouvelle notion, construction d'automatismes, approfondissement/ remédiation ;
— la modification de la place de l'écrit par rapport à des exercices d'entraînement plus traditionnels.

On analyse dans ce guide trois jeux :

— le jeu dit du « saladier » ;
— un jeu de déplacement sur une piste ;
— le Chiffroscope.

L'activité mathématique dépend du choix réalisé pour certaines valeurs de variables et s'appuie sur deux phases importantes : la validation et la synthèse/ institutionnalisation.

S'interroger sur les variables choisies dans ces trois exemples peut permettre aux professeurs d'analyser les différents jeux qu'ils exploitent dans leur classe en considérant les procédures de leurs élèves.

69 — « Les mathématiques par les jeux », ressource Éduscol : http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths_par_le_jeu/92/4/01-RA16_C3_C4_MATH_math_jeu_641924.pdf

Analyse du jeu du saladier

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Connaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 10, calculer le complément à 10 ou à un nombre inférieur à 10.

RÈGLES DU JEU

Le professeur communique à deux élèves une quantité de jetons à prendre (sous la forme du nom du nombre ou de son écriture chiffrée par exemple).

Un des élèves (A) ferme les yeux pendant que l'autre (B) cache une partie des jetons sous un petit saladier (ou un gobelet) opaque. L'élève A doit donner le nombre de jetons cachés et justifier sa réponse. Ensuite, l'élève B lève le saladier et valide la réponse de l'élève A.

Afin de mener chacune des parties, un dialogue ritualisé entre les deux joueurs est mis en place :

Élève B : *Ouvre les yeux. Dis-moi combien d'objets sont cachés sous le saladier ?*
Élève A : *Je pense qu'il y a X jetons cachés sous le saladier.*
Élève B : *Comment le sais-tu ?*

Ici, il est essentiel que les jetons restent cachés pour anticiper le nombre de jetons cachés (et ne pas le constater uniquement en dénombrant le nombre de jetons cachés).

Élève A : *J'ai compté.../Je sais que.../Je connais...*
Élève B : *Nous allons vérifier ta réponse.*

Dans la partie suivante, les rôles changent.

À chaque bonne réponse accompagnée d'une justification correcte, l'élève gagne un point. Le gagnant est celui qui, à la fin du jeu, a le plus de points.

Figure 46. La quantité de départ, ici 7, est représentée par des jetons.

Figure 47. Le joueur B cache une partie des jetons sous le gobelet et demande au joueur A de trouver le nombre de jetons cachés.

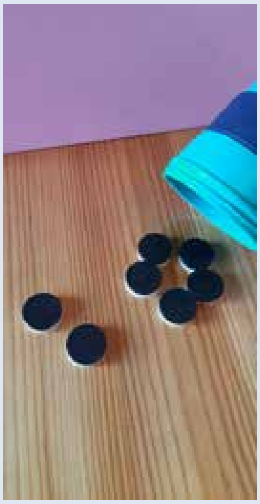


Figure 48. Le gobelet est soulevé après la réponse de l'élève A et sa proposition de justification.

CRITÈRE DE RÉUSSITE

Pour gagner, l'élève doit être capable de donner le complément à la quantité totale de jetons et d'expliquer comment il a fait.

Ce jeu peut être utilisé dès le début de CP dans la continuité des activités de grande section de maternelle. Il peut être à nouveau proposé au fil de l'année de CP pour la mémorisation des premières tables d'addition, notamment pour les familles des compléments à 10 ou des sommes inférieures à 10 (cf. chapitre 2). Un lien peut également être fait avec la situation de référence de la boîte (cf. chapitre 2, p. 53) et la résolution de problèmes de transformation (cf. chapitre 3).

SUPPORTS MATÉRIELS

- Des jetons ;
- Un petit saladier ou un gobelet opaque pour cacher une partie de la collection ;
- Une feuille de score pour garder trace des décompositions travaillées (en écrivant la quantité initiale, la quantité découverte et celle cachée) et des réussites.

VARIABLES	
Nombre de joueurs	2 joueurs qui alternent les rôles.
Durée de la partie	Déterminée par le nombre de jets imposé par le professeur ou par le nombre de points à atteindre.
Taille des nombres	– Nombres égaux ou inférieurs à 10. – Selon la période de l'année, on peut décider de travailler un temps long sur un seul nombre (par exemple, 5 ou 10 qui vont être essentiels dans la mémorisation des tables d'addition) ou de faire varier la quantité.
Représentation du nombre	– La quantité initiale de jetons peut être donnée sous forme d'écriture chiffrée ou à l'oral, ou encore représentée par une quantité d'objets. – L'organisation spatiale des collections initiale et restante peut constituer un appui pour retrouver la quantité cachée.

Les procédures possibles pour répondre dépendent des valeurs des variables choisies par le professeur et des supports à disposition des élèves.

Pour commencer la partie : si les élèves disposent de la quantité initiale sous forme d'écriture chiffrée ou du nom du nombre, ils doivent construire une collection de jetons ayant le nombre voulu ; si la donnée initiale est sous la forme d'une quantité de jetons, les élèves doivent en trouver le nombre d'éléments.

Afin de déterminer le nombre de jetons cachés, plusieurs procédures sont possibles (cf. les différentes stratégies listées au début de ce guide, p. 12). Nous pouvons en retenir quelques-unes :

- restituer un résultat mémorisé ;
- calculer, en passant soit par une addition à trous, soit par une soustraction ;
- dénombrer la collection visible par comptage, puis surcompter jusqu'au nombre donné de jetons avec appui sur les doigts (un doigt levé pour chaque nombre énoncé lors du surcomptage) ;
- décompter à partir du nombre total de jetons jusqu'au nombre de jetons visibles avec appui sur les doigts (un doigt levé pour chaque nombre énoncé lors du décomptage) ;
- chercher le complément au nombre donné à l'aide de la frise numérique en partant de la quantité visible et en dénombrant les cases jusqu'au nombre donné (ou en dénombrant les cases à partir du nombre donné jusqu'au nombre de jetons visibles).

VALIDATION

La validation se fait par vérification avec le matériel en soulevant le saladier.

SYNTHÈSE

En début d'année, une phase de synthèse permettra de mettre en évidence ou de réactiver les décompositions des nombres (maisons des nombres – cf. chapitre 2) et la mémorisation de ces faits numériques comme stratégie gagnante. Elle peut aussi conduire à des écritures du type : 2 + 3 = 5 ou 5 – 2 = 3 en lien avec la résolution de problèmes.

Analyse d'un jeu de déplacement sur piste

OBJECTIF D'APPRENTISSAGE

Calculer mentalement à partir d'anticipation de déplacements.

RÈGLE DU JEU

Déplacements sur une suite de cases du type :

1																	

Chaque joueur, à tour de rôle, lance deux dés, éventuellement adaptés (faces avec des nombres allant de 1 à 3, constellations ou chiffres), et place son pion, pour commencer, sur la case correspondant au nombre obtenu (somme des faces supérieures des deux dés).

Chaque joueur, à tour de rôle, lance ensuite les deux dés et se déplace sur la piste d'autant de cases que le nombre indiqué par les dés.

La partie s'arrête après avoir effectué trois lancers de dés.

Le gagnant est celui qui réussit à écrire correctement le numéro de la case sur laquelle il est arrivé et qui est allé le plus loin.

Durant la partie, après chaque jet, l'élève écrit le nombre obtenu par le tirage des dés et le numéro de la case sur laquelle se trouve son pion (une feuille de scores peut lui être proposée au début de la partie).

CRITÈRE DE RÉUSSITE

Pour gagner, l'élève doit être capable d'anticiper le numéro de la case sur laquelle sera son pion afin de le motiver à surcompter ou à calculer correctement.

Ce jeu peut être utilisé à différents moments de la progression, en jouant notamment sur la représentation et la taille des nombres sur les faces des dés ; il peut être joué en autonomie par les élèves, la validation pouvant se faire sans l'aide du professeur. La feuille de scores permet néanmoins de garder trace des différents tirages. L'accès aux procédures se fait en observant les élèves (déplacement sur la piste de jeu en prenant ou non en compte la case de départ, surcomptage sur la piste de jeu en passant par le nom des nombres, calcul en passant par les écritures chiffrées, etc.). En fin de séance, une synthèse peut ainsi être conduite en appui sur les procédures observées et sur d'éventuelles erreurs repérées à partir des fiches de scores.

VARIABLES	
Nombre de joueurs	Entre 2 et 4.
Durée de la partie	Déterminée par le nombre de jets imposé par le professeur ou par le nombre de points à atteindre.
Taille des nombres	– La position de départ sur la file et les déplacements peuvent être donnés par les dés, par des cartes tirées au sort ou encore par des nombres choisis par le professeur permettant éventuellement de différencier selon les connaissances des élèves. – La piste numérique peut commencer avec un nombre plus grand que 1.
Représentation du nombre	Avec les constellations ou des écritures chiffrées. Les nombres retenus et les représentations choisies peuvent dépendre des groupes d'élèves invités à jouer ensemble.
Taille de la piste	La taille de la piste dépend de la taille des nombres et de la durée de la partie.
Supports matériels	– Une feuille de score pour garder trace de la position de départ, des déplacements et du raisonnement. – Une file numérique avec au moins le numéro de la première case ; d'autres numéros peuvent éventuellement être indiqués, mais pas pour l'ensemble des cases (sinon, l'élève n'aurait pas besoin d'anticiper le numéro de la case sur laquelle il se trouve, et son activité mathématique serait réduite).

Selon les valeurs attribuées à certaines variables, les procédures des élèves peuvent ainsi varier : par exemple, en proposant une file numérique avec quelques numéros de cases indiqués (en plus de 1) et un temps limité pour répondre, des procédures de surcomptage ou de calcul peuvent être favorisées. Si l'élève joue avec des nombres supérieurs à 10, indiqués en écriture chiffrée sur les dés ou sur des cartes, les procédures de calcul devraient lui permettre d'obtenir un résultat correct plus rapidement.

VALIDATION

Elle peut se faire de différentes façons (selon l'avancée dans la progression) :

— par superposition avec une frise numérique et vérification des différents déplacements ;
— par détermination du numéro des cases étape après étape (par surcomptage) puis vérification sur la file du jeu ;
— par détermination du numéro de la case d'arrivée (par calcul), puis vérification à partir de la file du jeu ;
— en s'appuyant sur des outils, des affiches ou des écrits de référence utilisés pour le calcul.

SYNTHÈSE

Elle peut porter sur différents points selon le moment dans l'année où ce jeu est utilisé :

— pour déplacer le pion et donner le numéro de la case d'arrivée, on ne recompte pas le numéro de la case de départ ;
— faire le lien entre le nombre de cases dénombrées, la valeur du dé et la position sur la piste ;
— écrire les calculs correspondant aux déplacements, etc.

L'utilisation de la frise numérique lors de la validation peut permettre aussi de valider la transcription du nom du nombre en écriture chiffrée.

Analyse du jeu du Chiffroscope[70]

OBJECTIF D'APPRENTISSAGE

Figure 49. Cartes issues du jeu du Chiffroscope.

Travailler l'écriture chiffrée d'un nombre à partir de différentes situations de codage et de conversion (écrire un nombre en chiffres à partir d'une décomposition en unités de numération).

70 — https://chiffroscope.blogs.laclasse.com/

RÈGLES DU JEU

Le but est d'écrire de manière collaborative le nombre représenté par l'ensemble des « cartes Nombres » et des cartes « unités de numération » déposées sur le plateau-tableau. Dans un premier temps, on effectue un tirage (3 à 5 tirages) des cartes « unités de numération » et des « cartes Nombres ». Le second temps est celui de la recherche collaborative du nombre écrit en chiffres associé au tirage.

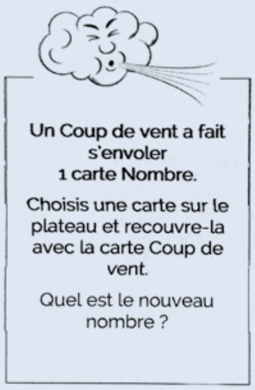


Figure 50. Une variante du jeu : « *Le Coup de vent* ».

Les variantes du jeu (« *Le Décal'tout* », « *Quel est le tirage ?* », « *Le Coup de vent* », etc.) permettent une approche plus ludique et offrent la possibilité de travailler d'autres propriétés des nombres.

CRITÈRE DE RÉUSSITE

Il s'agit d'un jeu collaboratif dans lequel il n'y a pas de gagnant. Les élèves se répartissent le tirage des nombres et trouvent ensemble la solution.

SUPPORTS MATÉRIELS

— Un tableau avec des colonnes ;
— Des cartes « unités de numération » : unités, dizaines ;
— Des « cartes Nombres » à un chiffre (voire deux chiffres en toute fin d'année) ;
— Pour les variantes : des cartes « *Décal'tout* », des cartes « *Coup de vent* ».

On notera que dans ce jeu, le tableau de numération n'est pas classiquement vu comme une technique à apprendre. Il est composé de colonnes qui ne sont pas prédéterminées et en nombre plus important que nécessaire, ce qui suggère la présence d'autres unités de numération plus petites ou plus grandes. Plusieurs « cartes Nombres » peuvent être déposées dans une même colonne, ce qui peut conduire à un nombre d'unités supérieur à dix et par conséquent à la nécessité de convertir dix unités en une dizaine. Toutes les unités de numération ne font pas l'objet d'un tirage de carte conduisant à la nécessité d'écrire un zéro dans l'écriture du nombre pour signifier l'absence d'unités.

VARIABLES	
Nombre de joueurs	2 joueurs.
Nombre de tirages	Plus le nombre de tirages de « cartes Nombres » et de cartes « unités de numération » est important, plus les élèves ont à faire des conversions entre unités et dizaines.
Durée de la partie	La durée dépend du nombre de tirages indiqué par l'enseignant (en général de 3 à 5) – 5 à 15 min.
Taille des nombres	– La série de « cartes Nombres » de niveau 1 est composée des nombres de 0 à 4. – La série de « cartes Nombres » de niveau 2 est composée des nombres de 0 à 8. – Les cartes « unités de numération » utilisées au CP sont : unités et dizaines.
Représentation du nombre	Le nombre est écrit avec des unités de numération, mais sans que l'ordre dizaine-unités ne soit respecté et avec un nombre d'unités qui peut être supérieur à 10. Par exemple, trois tirages peuvent conduire à devoir écrire en chiffres un nombre composé de : 7 unités – 4 dizaines – 5 unités.

VALIDATION

Par l'enseignant, par un autre groupe d'élèves ou de façon numérique[71]. Elle peut aussi se faire par l'utilisation de matériel (cubes sécables ou matériel multibase).

SYNTHÈSE

Elle porte sur les aspects positionnel et décimal des écritures chiffrées, sur le rôle du tableau de numération à construire pour les besoins de la partie et sur les différentes procédures qui peuvent être mobilisées pour écrire le nombre en chiffres ; selon les tirages et les procédures des élèves, le bilan pourra aussi porter sur la conversion 10 unités = 1 dizaine ou sur le comptage à l'aide de la comptine des dizaines. Les « Arrêts sur images » tels que décrits par l'équipe de l'Ifé (Institut français de l'éducation) peuvent être des supports intéressants pour mener ces synthèses.

Le jeu peut être adapté avec d'autres cartes « unités de numération » (centaines, milliers, etc., dixièmes, centièmes, etc.) et des séries de « cartes Nombres » à deux chiffres pour offrir un travail approfondi et continu, sur l'ensemble des cycles 2 et 3, sur les écritures chiffrées des nombres entiers et décimaux.

71 — Voir Sophie Soury-Lavergne, Stéphanie Croquelois, Jean-Luc Martinez, Jean-Pierre Rabatel, « Conceptions des élèves de primaire sur la numération décimale de position », *Revue de mathématiques pour l'école*, n° 233, 2020.

Focus | Analyse des jeux mathématiques

Dans ce focus, nous allons présenter des critères permettant d'analyser le potentiel didactique du jeu considéré au sens d'une activité ludique.

Objectifs visés et place dans la séquence d'apprentissage	• Le jeu permet-il d'atteindre l'objectif d'apprentissage qui lui est associé ? • Est-il utilisé comme situation d'introduction (d'une notion), d'entraînement, d'évaluation ?
Accompagnement et présence du professeur	• Le professeur doit-il être présent ? Quel est son rôle ?
Communication et échanges (verbalisation – formulation)	• Le jeu favorise-t-il la communication et les échanges entre élèves ? • Une phase de verbalisation est-elle prévue (avec les autres joueurs, avec la classe, avec le professeur) ?
Complexité des règles	• Les règles sont-elles suffisamment simples pour que l'élève puisse les comprendre rapidement ? Peuvent-elles évoluer au cours de l'apprentissage ? • Le nombre de joueurs est-il important pour l'apprentissage ? (On peut jouer seul, à plusieurs les uns « contre » les autres, ou en équipe – jeu collaboratif.) • Les élèves peuvent-ils facilement jouer de façon autonome (sans la présence du professeur) ? À quelles conditions (support de suivi, connaissance parfaite des règles ? Comment le professeur accède-t-il alors aux procédures ?…) ?
Dans le cas de logiciels ou de jeux sur tablette	• Quelques points de vigilance : – la cohérence par rapport aux programmes ; – la diversité des tâches proposées ; – la mobilisation effective des connaissances pour réussir (et non d'autres stratégies ne reposant pas sur des connaissances mathématiques) ; – la qualité des aides mises à disposition ; – le suivi des progrès et des résultats des élèves.
Évolution du jeu en lien avec la progression et la différenciation	• Peut-on jouer sur certaines variables pour faire évoluer le jeu (et bloquer certaines procédures mathématiques ou non, par exemple) ou pour différencier ?
Institutionnalisation et traces écrites	• Une institutionnalisation et/ou des traces écrites sont-elles prévues en lien avec le jeu (apprentissage d'une notion, mémorisation d'une procédure, etc.) ?
Validation	• L'élève peut-il être tour à tour joueur et arbitre (en lien avec la question de la validation) ? • Le jeu est-il autocorrectif ?

En résumé

- Pour que le jeu permette des apprentissages mathématiques, il est nécessaire qu'il ait été explicitement pris en charge dans la conception de la situation d'enseignement sous l'aspect d'une double valence didactique et ludique. Le jeu est alors vu dans la situation comme moteur de la dévolution, l'élève s'investissant tant au niveau intellectuel qu'au niveau affectif. Il se rapproche des mathématiques en ce qu'il amène l'élève à faire des choix, prendre des décisions, anticiper un résultat.

- À travers le jeu, les élèves vont prendre plaisir à développer des stratégies et des raisonnements mathématiques, avec pour objectif l'apprentissage de stratégies et leur optimisation par des phases de verbalisation pour réussir le défi relevé.

VI

Comment analyser et choisir un manuel de mathématiques pour le CP ?

Le manuel scolaire est un support destiné à l'élève, s'inscrivant dans le processus d'apprentissage et utilisé par le professeur lors de sa conception de l'enseignement. En complément d'autres outils pédagogiques (instructions officielles et autres ressources institutionnelles, guides du maître, ouvrages de didactique ou de pédagogie, articles de recherche ou de vulgarisation[72], sites Internet divers, etc.), le manuel est un outil très répandu. Cependant il est également critiqué, notamment en termes de structure, de rythme, de manque de prise en charge de la différenciation ou pour la place, généralement faible, qu'il accorde à la manipulation et au jeu mathématique. L'objectif de ce chapitre est d'outiller les professeurs afin de les aider à choisir de la manière la plus éclairée possible le manuel pertinent pour la mise en œuvre de leurs enseignements.

Usage des manuels en classe

L'édition de manuels en France est foisonnante et l'opportunité offerte par Internet a engendré l'essor de très nombreuses ressources en ligne aussi bien institutionnelles que produites par des enseignants.

Un certain nombre d'enseignants appuient leur enseignement de mathématiques sur un manuel parce qu'il permet l'identification de savoirs mathématiques précis et entraîne, par le biais d'exercices, à la maîtrise de ces savoirs. Rassurant, le manuel est également fortement critiqué par ses utilisateurs qui lui reprochent d'imposer un rythme d'apprentissage qui n'est pas forcément celui de la classe ou des élèves. Par exemple, on observe, dans certaines classes de CP, un temps très long – deux, parfois trois périodes – consacré aux nombres inférieurs à 30 au détriment des nombres supérieurs qui nécessiteraient pourtant un travail dans la durée pour en assurer la maîtrise. L'image réductrice donnée aux mathématiques (« compléter des trous dans une page imprimée ») fait également partie des critiques évoquées ainsi que la place parfois restreinte de la manipulation et de la résolution de problèmes.

72 — La revue *Grand N*, revue de mathématiques, sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire publiée par l'Irem de Grenoble et dirigée par un panel de chercheurs, professeurs en Inspé, enseignants-formateurs, en est un bon exemple : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/grand-n-365078.kjsp

L'idée de ce chapitre est donc de redonner au professeur sa place d'organisateur et de régulateur des apprentissages en exploitant le manuel comme un support pour accompagner l'élève en complément d'activités de manipulation ou de jeux, de phases de mise en commun et d'institutionnalisation. Le travail du professeur consiste à élaborer son enseignement afin d'anticiper les objectifs des tâches, l'activité des élèves et son rôle dans chacune des phases de l'apprentissage. L'utilisation du manuel ne doit pas l'en décharger ni le contraindre à explorer les seuls choix du manuel.

L'objectif de cette partie est d'outiller les professeurs afin de les aider à déterminer les avantages et les points de vigilance d'un manuel en CP à partir de deux approches :

- la première cernera les éléments à analyser dans une approche globale du manuel : lien avec les programmes en cours, propositions didactiques, leçons proposées aux élèves, nombre d'exercices pour chaque notion, place de la résolution de problèmes, etc.
- la seconde précisera des points de vigilance en fonction de la notion abordée, au regard de ce qui a été développé dans les précédents chapitres.

Approcher globalement le manuel

Au CP, le manuel est le plus souvent un fichier accompagné d'un guide du maître et, quelquefois, de fiches photocopiables. Il convient de rappeler que le travail sur le seul fichier n'est pas suffisant pour construire les connaissances. L'utilisation du fichier par le professeur doit s'assortir d'un travail de lecture attentive et d'une appropriation des propositions du guide du maître, afin d'être bien au clair sur les enjeux de l'apprentissage, les étapes à enchaîner, les obstacles didactiques à surmonter, etc.

Les critères relatifs à l'ensemble de l'enseignement tel qu'il est prévu dans le manuel peuvent être dégagés à partir de la lecture des avant-propos dans les guides du maître ou par une lecture rapide de quelques séances, ils ne nécessitent pas une analyse approfondie du contenu. Ils ciblent des points de vigilance et permettent de repérer d'éventuels manques à combler.

Manuel de l'élève

Le manuel est-il lisible ? Les éléments essentiels ne sont-ils pas noyés par des distracteurs : utilisation des couleurs sans lien avec les apprentissages, illustrations inutiles ou foisonnantes, voire nuisibles aux apprentissages ?

L'ergonomie du manuel est-elle un appui au repérage des connaissances essentielles et une aide à la compréhension pour un élève de CP : taille des figures, place prévue pour les réponses, lisibilité, rôle des couleurs, mise en exergue des connaissances mathématiques, etc. ?

Une place suffisante est-elle donnée aux écrits de l'élève : schémas, raisonnements, écrits personnels, etc. ?

Quel est le contenu du manuel et quelle utilisation en est-elle prévue ?
- situations de découverte ;
- exercices d'entraînement ;
- textes de savoir, etc.

Guide du professeur

Les autres ressources à disposition du professeur pour le guider dans la mise en œuvre des apprentissages sont considérées ici comme l'équivalent du « guide du professeur ».

Un guide du maître accompagne-t-il le fichier ? Contient-il des éléments didactiques ou des références à la recherche explicitant au professeur les choix faits par les auteurs ?

Quelle est la précision de description des séances ?
- définition de l'objectif des séances en lien avec les programmes ;
- durée des différentes phases ;
- éléments pour la formulation des consignes ;
- éléments pour la gestion des mises en commun ;
- éléments d'institutionnalisation ;
- évaluation ;
- différenciation possible.

Organisation de la programmation

- La progression par domaines et sur l'année est-elle indiquée ?
- La programmation est-elle conforme aux instructions officielles ?
- La progression est-elle chronologique ou par séquence ?
- Y a-t-il des séquences d'apprentissage construites ?
- Le rappel des connaissances antérieures nécessaires aux apprentissages est-il fait en début de séquence ?

Format des enseignements

Quels sont les choix d'organisation des séquences ?
- séances qui se succèdent d'un domaine à l'autre sans être regroupées en séquences ;
- séances qui se succèdent autour d'un même objectif en séquence organisée.

Format des séances

- Les **séances** permettent-elles de revenir sur des connaissances anciennes déconnectées – ou non – de la notion nouvellement enseignée ?
- Des **situations d'introduction** du savoir sont-elles proposées ?
- Des situations où chaque élève manipule sont-elles proposées ?
- Des **jeux** sont-ils associés à la séance (entraînement, consolidation de savoirs, découverte d'une notion) ?
- Une institutionnalisation est-elle proposée ?
- Les exercices d'entraînement sont-ils variés et en nombre conséquent ?

Institutionnalisation

- Un questionnement destiné à accompagner la mise en forme du savoir est-il suggéré ?
- L'institutionnalisation existe-t-elle ? Si oui, sur quoi porte-t-elle et dans quel but ?
- Le professeur est-il accompagné pour conduire cette institutionnalisation ?
- L'institutionnalisation proposée est-elle pertinente d'un point de vue mathématique et didactique ?

Différenciation

La variété des tâches proposées permet-elle de mettre en œuvre la différenciation dans la classe ? Les pistes permettant de gérer cette différenciation sont-elles proposées ?
- liste des procédures possibles et hiérarchisation ;
- évolutions à apporter ;
- analyse des erreurs ;
- supports prévus ou à concevoir pour dépasser des procédures, pour prendre en compte des erreurs ou s'adapter au handicap.

Évaluation

- **Quels sont les outils d'évaluation proposés au professeur** (évaluations diagnostiques, évaluations en cours d'apprentissage, évaluations de fin de séquences ou de fin de périodes) ?

Autres ressources complémentaires à disposition

— Existe-t-il une version numérique du manuel, des ressources digitales complémentaires ?

Certains critères peuvent éclairer un choix en fonction de la plus-value apportée ou attendue :

— aide proposée pour tous les élèves, pour les élèves à besoins particuliers, adaptation pédagogique ;
— supports collectifs pour vidéoprojection ;
— présence de ressources multimédia (capsules vidéos, etc.) pour une lecture collective ou individuelle, en présentiel ou à distance ;
— entraînement pour l'élève avec la prise en compte de la consolidation mnésique, grâce à une réactivation régulière des apprentissages afin d'ancrer et structurer les connaissances ;
— interactivité, prise en compte des erreurs et proposition d'activités adaptées permettant une différenciation des apprentissages ;
— la numérisation en PDF : elle donne la possibilité d'une projection collective et d'annotations sur TBI par exemple.

L'apport du numérique le plus prometteur actuellement concerne l'aide aux élèves à besoins particuliers. Le numérique représente une des solutions les plus novatrices et contribue ainsi à rendre l'école et les pratiques pédagogiques plus inclusives. Une accessibilité qui s'applique autant au matériel qu'aux ressources[73].

Approcher le manuel sous l'aspect des contenus

À l'issue de cette analyse, le professeur pourra déterminer les éléments complémentaires qu'il devra construire en plus des propositions du manuel pour atteindre les objectifs définis par les programmes et les apports de la recherche.

Il ne s'agit pas dans ce qui suit d'être exhaustif par rapport à l'enseignement de certains contenus mais davantage de donner quelques points de vigilance spécifiques et incontournables qui ont pu être cités dans les autres chapitres de ce guide.

73 — « Soutien à la production de ressources numériques pour l'École », Éduscol : https://eduscol.education.fr/cid56843/ressources-numeriques-adaptees-soutenues-et-realisees.html

Programmation

- Quelle est la programmation de l'enseignement du nom des nombres et des écritures chiffrées, du calcul mental, du calcul posé, de la résolution de problèmes ?
- Prend-elle en compte le rythme d'apprentissage attendu dans le champ numérique ?

Numération orale et numération écrite chiffrée (cf. chapitre 1)

- Un matériel de numération de référence est-il utilisé ?
- Quelle place est respectivement donnée au traitement de la numération orale et de la numération écrite chiffrée ? Quels liens sont établis entre les deux ?

Calcul mental (cf. chapitre 2)

- La description des séquences de calcul mental est-elle faite dans le guide du maître ? Avec quelle régularité ?
- Y a-t-il des séquences déclinées en séance de découverte, plusieurs séances d'entraînement et d'approfondissement et une ou plusieurs séances d'évaluation ?
- Les séquences de calcul mental abordent-elles :
  - la mémorisation des faits numériques ?
  - le développement et l'automatisation de procédures de calcul ?
- La progression en calcul mental est-elle en lien avec l'étude de la numération ? Est-elle spiralaire ?

Calcul posé (cf. chapitre 2)

- Le manuel prévoit-il d'utiliser un matériel de manipulation pour construire la technique opératoire ?
- La technique opératoire de l'addition posée est-elle en lien avec les propriétés de la numération écrite chiffrée ?
- Les calculs proposés mettent-ils en jeu d'emblée une retenue ?

Résolution de problèmes (cf. chapitre 3)

- Quelle place est accordée à la résolution de problèmes (nombre de problèmes par semaine) ?
- Les problèmes apparaissent-ils dans tous les domaines ?
- Les problèmes proposés sont-ils variés et permettent-ils d'explorer les différents types de problèmes attendus en fin de CP ?
- Les problèmes proposés permettent-ils d'explorer l'ensemble du champ numérique du CP ?
- Y a-t-il des propositions sur la représentation et la modélisation des problèmes ? Le professeur est-il accompagné sur ce point ?
- Différentes procédures de résolution sont-elles évoquées dans le manuel ?

En résumé

Dans le cadre du travail de conception de l'enseignement, le manuel est un appui très largement exploité.
En mathématiques, son choix pourra être encadré par les points essentiels suivants :

— la programmation proposée, au regard de l'organisation générale du manuel et de sa conformité aux instructions officielles ;

— la construction du nombre avec la présence d'un travail articulé autour des deux systèmes de numération orale et écrite chiffrée ;

— la progression en calcul mental (séquences : mémorisation des faits numériques, développement et automatisation de procédures de calcul) et l'approche du calcul posé ;

— la régularité de la résolution de problèmes dans tous les domaines ;

— la structure globale des séances d'apprentissage proposées, en termes de manipulation, d'institutionnalisation, d'entraînement, de différentiation, d'évaluation.

VII

Programmer sa progression au CP

Ce chapitre aborde la programmation, sur l'année, des progressions de l'apprentissage des nombres, des calculs et de la résolution de problèmes arithmétiques (chapitres 1, 2 et 3).

Distinction entre progression et programmation : la progression indique la succession, sur l'année, des apprentissages selon la nature des savoirs en jeu, ou, de manière plus précise, leur mise en réseau, tandis que programmer une progression c'est adopter une chronologie, déterminer la période de l'année durant laquelle sera mené tel ou tel apprentissage.

L'ARTICULATION DES CHAMPS NUMÉRIQUES

Au même moment de l'année, des nombres différents interviennent dans l'apprentissage des systèmes de numération, des calculs et de la résolution de problèmes arithmétiques. Pour autant, ces divers champs numériques ne sont pas indépendants les uns des autres. Il s'agit d'articuler, de mettre en réseau, systèmes de numération, calculs et résolution de problèmes arithmétiques. Mais il existe aussi une progression propre à ces trois domaines d'enseignement. Quels nombres doit-on travailler selon la période de l'année ? Pour quelles notions ?

LA DIVERSITÉ DES ÉLÉMENTS À PRENDRE EN COMPTE POUR UNE PROGRAMMATION

La programmation proposée ci-après dépasse de loin la segmentation simpliste du champ numérique au fur et à mesure de l'année (nombres inférieurs à dix, vingt, trente, soixante, etc.). D'autres éléments sont à prendre en compte dans la programmation, comme la complexité sémantique des énoncés et la variété des contextes à aborder dans la résolution de problèmes. Ils ont été développés dans les chapitres précédents.

Un processus plus général d'apprentissage intervient aussi. En particulier, la gestion des notions anciennes par rapport aux nouvelles, ce qui comprend des moments d'institutionnalisation et de rappel ou encore la prise en compte des cheminements cognitifs des élèves (cf. l'introduction de ce guide). Un exemple d'organisation de séquences est proposé dans le focus du chapitre 1, page 40.

Les progressions pour les périodes 1 et 2

Les deux systèmes de numération : périodes 1 et 2

Les enseignements « Explorer les “petits” nombres en utilisant le système de numération oral » et « Construire le système de numération écrit chiffré » sont à mener de front dès le tout début d'année en s'appuyant sur les acquis de l'école maternelle.

EXPLORER LES « PETITS » NOMBRES EN UTILISANT LE SYSTÈME DE NUMÉRATION ORAL

— Renforcement des connaissances de la grande comptine de un à dix-neuf et de la petite comptine de un à neuf pour construire une frise numérique structurée au moins jusqu'à trente.

Si le premier type d'itinéraire d'enseignement est emprunté par la suite (cf. le second temps ci-après : « Construire le système de numération écrit chiffré » et le chapitre 1), il est possible d'aller au-delà de trente pour cette comptine, afin d'avoir la possibilité d'introduire les écritures chiffrées pour ces nombres à partir de leur nom. Si le second itinéraire est emprunté, il faut se limiter à trente-et-un.

— Usages sociaux tels que la date.
— Dénombrement, estimation et comparaison de petites collections (jusqu'à vingt).
— Comparaison de nombres selon leur nom (ordre d'arrivée dans la comptine) – au moins jusqu'à trente.
— Calcul mental (jusqu'à vingt) : techniques et explicitation, lien avec les problèmes arithmétiques.

CONSTRUIRE LE SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉCRIT CHIFFRÉ

— 1er temps : la dizaine
  - Travail sur la dizaine

Ce travail est nécessaire quel que soit l'itinéraire d'enseignement adopté par la suite dans le second temps.

— 2d temps : construction du système de numération écrit chiffré
  - Compréhension/construction des écritures chiffrées en termes de dizaines et unités, via des comparaisons, dénombrements et estimations de collections.

Deux types d'itinéraires d'enseignement sont ici possibles. Si le premier type est emprunté, les écritures chiffrées abordées sont d'abord celles des nombres dont les noms sont connus des élèves. Si c'est le second, les écritures chiffrées de tous les nombres jusqu'à 100 sont rendues directement accessibles (via la procédure « écriture chiffrée »), même si leur nom (numération orale) n'a pas encore été vu.

Les calculs : périodes 1 et 2

CALCUL MENTAL

Les apprentissages se fondent sur une bonne connaissance de la comptine numérique (numération orale) jusqu'à vingt, puis trente.

Faits numériques

- Tables d'addition : introduction de certains résultats.
- Doubles des nombres (nombres jusqu'à 5 puis jusqu'à 10).
- Compléments à dix (nombres jusqu'à 10).
- Somme de deux nombres (résultat inférieur à 10).
- Décompositions additives des nombres (nombres jusqu'à 10).

Procédures élémentaires

- Ajout de 1, retrait de 1 (nombres jusqu'à 30).
- Ajout de 2, retrait de 2 (nombres jusqu'à 30).
- Ajout de 10 (aux nombres jusqu'à 10).
- Soustraire à 10 un nombre ≤ 5 (par exemple 10 – 3).
- Commutativité de l'addition (5 + 3 = 3 + 5).

Combinaison de procédures

- Additions de deux nombres dont le résultat est ≤ 20, sans franchissement de dizaine (12 + 6).
- Soustractions de type a – b avec a ≤ 20 et b < 10 (9 – 3, 15 – 5, etc.).

Les calculs, les procédures et les réponses sont indiqués soit à l'oral soit par des écritures chiffrées.

Symboles mathématiques

- Utilisation progressive des symboles « = », « + », « – » (en période 2).

La résolution de problèmes arithmétiques : périodes 1 et 2

PROBLÈMES ADDITIFS

Dans les deux types de problèmes traités ici, les stratégies élémentaires de dénombrement du début d'année évoluent progressivement vers des stratégies de dénombrement en appui sur des représentations figuratives ou schématiques des collections. Certains élèves commenceront à mobiliser des stratégies de calcul (utilisation de résultats mémorisés).

— Problèmes de parties-tout avec recherche du tout (nombres inférieurs à 10 pour chacune des parties).
— Problèmes de parties-tout avec recherche d'une des parties (en période 2, nombres inférieurs à 10).
— Problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de la quantité finale (nombres inférieurs à 10 pour chacune des parties).

Les écritures mathématiques avec les symboles « + », « – » et « = » sont proposées par le professeur et discutées avec les élèves après que ceux-ci ont résolu le problème. Elles ne sont pas exigées des élèves lors de cette résolution.

Afin qu'ils prennent du sens, il est nécessaire de proposer dès que possible des séances où l'un et l'autre des signes « + » et « – » sont mobilisés.

PROBLÈMES MULTIPLICATIFS

Ils seront principalement abordés durant les périodes 3, 4 et 5.

Les progressions pour les périodes 3 à 5

Les deux systèmes de numération : périodes 3 à 5

Les enseignements « Explorer les nombres en utilisant le système de numération oral » et « Explorer les nombres en utilisant le système de numération écrit chiffré » sont à mener de front durant les périodes 3 à 5. L'enseignement « Liens et dialogue entre les deux systèmes de numération » se fait au fur et à mesure de la découverte de la comptine numérique.

EXPLORER LES NOMBRES EN UTILISANT LE SYSTÈME DE NUMÉRATION ORAL

- Reprise et poursuite de la structure de la comptine numérique en petite comptine de un à neuf et grande comptine de un à dix-neuf pour construire une frise numérique structurée (progressivement jusqu'à cent).
- Comptine de dix en dix (dix, vingt, etc.).
- Rencontre de l'écriture littérale en français des noms des nombres (progressivement jusqu'à cent).
- Dénombrement (procédure « nom du nombre »), estimation et comparaison de quantités (progressivement jusqu'à cent).
- Comparaison, ordre et encadrement de nombres selon leur nom (ordre d'arrivée dans la comptine) – progressivement jusqu'à cent.
- Calcul mental (jusqu'à vingt puis au-delà) : techniques et explicitation, lien avec les problèmes arithmétiques.

EXPLORER LES NOMBRES EN UTILISANT LE SYSTÈME DE NUMÉRATION ÉCRIT CHIFFRÉ

Si ce n'est pas encore fait, poursuivre **jusqu'à 100** la construction de la numération écrite chiffrée durant la période 3.

- Dénombrement (procédure « écriture chiffrée »), estimation et comparaison de quantités (jusqu'à 100).
- Travail de l'aspect positionnel et de l'aspect décimal en utilisant des collections partiellement organisées en dizaines.
- Exercices avec les unités de numération (jusqu'à 100).
- Comparaison, ordre et encadrement de nombres (utilisation de la signification des chiffres) – jusqu'à 100.
- Addition posée et initiation au calcul de la soustraction (jusqu'à 100) : techniques et justification, lien avec les problèmes arithmétiques.

LIENS ET DIALOGUE ENTRE LES DEUX SYSTÈMES DE NUMÉRATION

- Lire et écrire les nombres (jusqu'à 100).
- Dénombrement, estimation et comparaison de quantités (jusqu'à 100) : deux procédures à enseigner, l'une privilégiant la numération orale (procédure « nom du nombre »), l'autre la numération écrite chiffrée (procédure « écriture chiffrée »).
- Calcul mental, en ligne et posé.
- Comparaison, ordre et encadrement de nombres (jusqu'à 100).
- Repérage d'un rang ou d'une position (jusqu'à 100).
- Problèmes arithmétiques (jusqu'à 100).

Les calculs : périodes 3 à 5

CALCUL MENTAL

Faits numériques

- Tables d'addition (nombres jusqu'à 10) et compléments à 10.
- Double des dizaines entières (résultats jusqu'à 100).
- Moitié des nombres pairs (nombres jusqu'à 20).

Procédures élémentaires

- Ajouter 10, soustraire 10 (nombres jusqu'à 100).
- Dans le cadre de la construction des tables d'addition (suite et fin) – nombres jusqu'à 20 : presque-doubles : 6 + 5 ; 8 + 7, etc. ; appui sur 10 (par exemple, 7 + 5 = 10 + 2 donc 7 + 5 = 12).
- Commutativité et associativité de l'addition (5 + 3 = 3 + 5 ; 7 + 18 + 3 = 18 + 10) – nombres jusqu'à 100.
- Addition et soustraction de dizaines entières (40 + 30 ; 45 – 30) – nombres jusqu'à 100.

CALCUL EN LIGNE

Le calcul en ligne permet notamment de traduire mais aussi d'enrichir les calculs effectués mentalement, grâce à un recours à l'écrit et à l'introduction progressive et graduée d'un formalisme.

- Addition de deux nombres sans franchissement de dizaine (35 + 4 ; 72 + 5) puis avec franchissement de dizaine (37 + 53 ; 26 + 9) – nombres jusqu'à 100.
- Soustraction de deux nombres sans retenue (84 – 12 ; 35 – 4 ; 78 – 5).
- Soustraction de deux nombres avec franchissement d'une dizaine (15 – 6 ; 13 – 5) type a – b avec b < 10.

CALCUL POSÉ

- Introduction de l'algorithme de l'addition posée (nombres jusqu'à 100).
- Entraînements dans divers cas, notamment avec des sommes de trois termes générant des retenues de 1 ou 2 dizaines.

Symboles mathématiques

— Poursuite du travail sur les symboles « = », « + », « – ».
— Introduction éventuelle du symbole « x » (période 5 ou début de CE1).

La résolution de problèmes arithmétiques : périodes 3 à 5

PROBLÈMES ADDITIFS

Les stratégies élémentaires de dénombrement évoluent progressivement vers des stratégies de dénombrement en appui sur des représentations figuratives ou schématiques des collections. Les élèves seront incités à mobiliser des stratégies de calcul (mental, en ligne et posé) selon l'avancée des apprentissages dans ce domaine (cf. la programmation des calculs).

— Reprise des catégories de problèmes vues en périodes 1 et 2 sur un champ numérique plus étendu – valeurs numériques selon la progression en calcul (mental, en ligne et posé) :
  - problèmes de parties-tout avec recherche du tout, avec éventuellement 3 parties ;
  - problèmes de parties-tout avec recherche d'une des parties ;
  - problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de la quantité finale.

L'apprentissage des techniques d'addition en ligne ou posée en colonnes peut s'appuyer sur des problèmes de réunion de deux collections.

— Introduction de nouveaux types de problèmes :
  - problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de la transformation.

— Certains problèmes complexes pourront être proposés pour préparer le CE1 (en commençant par travailler avec des nombres inférieurs à 20), par exemple :
  - problèmes de parties-tout mettant en jeu trois collections avec recherche d'une des parties (2 étapes) ;
  - problèmes de transformation mettant en jeu deux transformations successives avec recherche de l'état final (2 étapes) ;
  - problèmes de transformation (positive ou négative) avec recherche de l'état initial (périodes 4 ou 5) ;
  - problèmes de comparaison, le critère de comparaison étant connu (périodes 4 ou 5).

Les écritures mathématiques avec les symboles « + », « – » et « = » sont encouragées à partir de la période 2. Leur utilisation est progressivement attendue pour les problèmes introduits en périodes 3 à 5.

PROBLÈMES MULTIPLICATIFS (AVEC TROIS NOMBRES EN JEU INFÉRIEURS À 30 – PÉRIODES 4 ET 5)

Les stratégies de résolution s'appuient sur du matériel de manipulation faisant intervenir la nature multiplicative des nombres en jeu, des représentations figuratives ou avec des schémas. L'enjeu est de construire le sens des opérations sans difficulté liée au calcul.

— Recherche du produit.
— Recherche du nombre de parts (partage égal).
— Recherche de la valeur d'une part.

En résumé

- Il existe certaines marges de manœuvre dans la programmation. Celle qui est proposée dans ce chapitre permet d'indiquer des repères forts sur les apprentissages, mais aussi ce qui peut être adapté selon le travail en concertation sur le niveau (en particulier les classes de CP dédoublées), sa classe, ses élèves, pour que chaque professeur puisse se l'approprier[74].

- Le programme officiel fixe des objectifs de cycle, avec des repères par année. Les objectifs de CP sont mis en perspective avec ceux du cycle 2. Le choix de la programmation au CP concerne donc toute l'équipe enseignante de l'école.

74 — Sur le processus documentaire, voir Ghislaine Gueudet, Luc Trouche, *Ressources vives – Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, 2010. Sur l'utilisation des manuels en classe (cf. chapitre 6 de ce guide), voir Nadine Grapin, Éric Mounier et Maryvonne Priolet, 2015 et 2018.

Bibliographie et outils de référence

DOCUMENTS INSTITUTIONNELS

- Attendus de fin de CP en mathématiques, Éduscol : ➔ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/73/2/02-Maths-CP-attendus-eduscol_1114732.pdf
- Repères annuels de progression pour le cycle 2, Éduscol : ➔ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Attendus_et_reperes_C2-3-4/75/0/20-Maths-C2-reperes-eduscol_1114750.pdf
- Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques (cycle 2), Éduscol : ➔ https://eduscol.education.fr/cid102696/ressources-pour-les-mathematiques-cycle-2.html
- Évaluation des niveaux de maîtrise du socle commun en mathématiques, Éduscol : ➔ https://eduscol.education.fr/177/mathematiques-cycle-2
- Banque de ressources (BRNE) en mathématiques des cycles 3 et 4 (cycle 2 à venir), Éduscol : ➔ https://eduscol.education.fr/cid105797/banque-de-ressources-brne-en-mathematiques.html
- Utiliser les évaluations au CP pour faire progresser les élèves, Éduscol : ➔ https://eduscol.education.fr/cid154794/utiliser-les-evaluations-pour-faire-progresser-les-eleves.html
- Le nombre au cycle 2, ressources pour faire la classe, CNDP-CRDP, « Les mathématiques par les jeux », Éduscol, 2017 : ➔ https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths_par_le_jeu/92/4/01-RA16_C3_C4_MATH_math_jeu_641924.pdf
- « Enseignement du calcul : un enjeu majeur pour la maîtrise des principaux éléments de mathématiques à l'école primaire » ; « La résolution de problèmes à l'école élémentaire », BOEN spécial n° 3 du 5 avril 2018 : ➔ https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=37752
- Recommandations pédagogiques : « Un apprentissage fondamental à l'école maternelle : découvrir les nombres et leurs utilisations », BOEN n° 22 du 29 mai 2019 : ➔ https://www.education.gouv.fr/bo/19/Hebdo22/MENE1915454N.htm?cid_bo=142291

- Rapport Villani – Torossian, *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, 2018 : ➔ https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242
- *Avis sur la place du calcul dans l'enseignement primaire*, Académie des sciences, 2007 : ➔ https://www.academie-sciences.fr/pdf/rapport/avis230107.pdf

OUVRAGES

- Barth Britt-Mari, *L'Apprentissage de l'abstraction*, Retz, 2011.
- Bolsius Christophe, *Fort en calcul mental ! Connaissances et stratégies pour réussir*, Scéren – CRDP de Lorraine, 2011.
- Bruner Jerome S., *The Relevance of education*, Norton, New York, 1973.
- Charnay Roland, *Réussir en maths à l'école c'est possible !*, Hatier éducation, 2018.
- Dias Thierry, *Enseigner les mathématiques à l'école – Une démarche positive pour des apprentissages réussis*, Magnard, 2018.
- Djament Daniel, Gamo Sylvie, *Le Calcul mental à l'école élémentaire – Les bases du calcul nécessaires à l'apprentissage des mathématiques*, Hachette éducation, 2018.
- Fagnant Annick, *Enseignement et apprentissage des mathématiques*, chapitre 5, « Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire », p. 131-150, De Boeck Supérieur, 2008.
- Fayol Michel, *L'Acquisition du nombre*, Presses Universitaires de France, coll. « Que sais-je ? », 2012.
- Gueudet Ghislaine, Trouche Luc, *Ressources vives – Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, 2010.
- Ifrah Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, 1981.
- Verschaffel Lieven, Greer Brian, De Corte Erik, “Whole number concepts and operations?”, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 557-628, 2006.

ARTICLES

- Briand Joël, « Manipuler en mathématiques… oui mais », *Au Fil des Maths*, revue de l'Apmep, n° 535, 2020.
- Briand Joël, Lacave-Luciani Marie-José, Harvouët Michèle, Bedere Dominique, Goua de Baix Véronique, « Enseigner l'énumération en moyenne section », revue *Grand N*, n° 66, p. 7-22, 2000. → https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/66n2_1555676483474-pdf
- Butlen Denis, Charles-Pézard Monique, « Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique », revue *Grand N*, n° 79, p. 7-32, 2007. → https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/79n2_1554796874332-pdf
- Carbonneau Kira, Marley Scott C., Selig James P., "A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives", *Journal of educational psychology*, 2013. → https://www.researchgate.net/publication/248701204_A_Meta-Analysis_of_the_Efficacy_of_Teaching_Mathematics_With_Concrete_Manipulatives
- Fagnant Annick, « Opérations arithmétiques et symbolisations variées. Partir des démarches informelles des élèves pour donner du sens aux apprentissages », p. 23-38, 2013. → https://www.researchgate.net/publication/280615163_Operations_arithmetiques_et_symbolisations_variees_Partir_des_demarches_informelles_des_eleves_pour_donner_du_sens_aux_apprentissages
- Fuson Karen, Li Yeping, "Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking", *ZDM: The international journal on mathematics education*, 41, p. 793-808, 2009.
- Grapin Nadine, Mounier Éric, « Vers un outil d'analyse de manuels : exemple d'étude en 1re année d'école élémentaire », *revue RMé*, n° 230, p. 30-37, 2018. → https://www.revue-mathematiques.ch/files/7615/3864/4175/RMe-230-Grapin.pdf
- Grapin Nadine, Mounier Éric, « Méthodologie d'analyse de manuels et étude du manuel *Méthode de Singapour CP* », revue *Grand N*, n° 102, p. 57-92, 2018.
- Guedin Nolwenn, Thevenot Catherine, Fayol Michel, « Des doigts et des nombres », *Psychologie Française*, 63(4), p. 379-399, 2018.

- Houdement Catherine, « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école », revue *Grand N*, n° 100, p. 59-78, 2017.
➔ https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100n3_1572699310489-pdf
- Laski Elida V., Jor'dan Jamilah R., Daoust Carolyn, Murray Angela K., "What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education", 2015.
➔ https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/2158244015589588
- MacIntosh Alistair, "Number sense in school mathematics: student performance in four countries", Monograph series 5, Perth MASTEC, 1997.
- MacIntosh Alistair, J. Reys Barbara, E. Reys Robert, "A proposed framework for examining basic number sense", s. d., 7, 1992.
- Mounier Éric, Grapin Nadine, Pfaff Nathalie, « Lire et écrire les nombres. Quelle place dans l'apprentissage des numérations au cycle 2 ? », revue *Grand N*, n° 106, 2020.
➔ https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-106-grand-n/2-lire-ecrire-les-nombres-quelle-place-dans-l-apprentissage-des-numerations-au-cycle-2--750635.kjsp
- Priolet Maryvonne, « Regard sur les utilisations des manuels scolaires de mathématiques par les professeurs des écoles en France métropolitaine », revue *Grand N*, n° 102, p. 93-111, 2018.
- Soury-Lavergne Sophie, Croquelois Stéphanie, Martinez Jean-Luc, Rabatel Jean-Pierre, « Conceptions des élèves de primaire sur la numération décimale de position », revue *RMé*, n° 233, 2020.
- Vergnaud Gérard, « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), p. 133-170, 1990.
- Verschaffel Lieven, Torbeyns Joke, De Smedt Bert, "Young children's early mathematical competencies: analysis and stimulation", CERME 10, février 2017, Dublin, Ireland.

RAPPORTS, CONTRIBUTIONS ET CONFÉRENCES

- Conférence de consensus, « Nombres et opérations, premiers apprentissages à l'école primaire », Cnesco, 2015 : ➔ http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Recommandations-du-jury.pdf
- Butlen Denis, Charles-Pézard Monique, Masselot Pascale, « Apprentissage et inégalités au primaire : le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire », contribution au rapport du Cnesco sur les inégalités scolaires d'origine sociale et ethnoculturelle, 2015. ➔ http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Enseignement-en-éducation-prioritaire.pdf
- Divisia Anne, Mastrot Géraldine, Croset Marie-Caroline, Stoffel Hélène, « Quelles modalités pour construire un rituel de numération efficace au cycle 2 ? », actes du 45e colloque de la Copirelem, Blois, p. 514-529, 2018.
- Guedin Nolwenn, « Donner du sens aux nombres et à leurs utilisations – de la manipulation à la symbolisation. Intérêts d'une pédagogie multimodale », actes du 44e colloque Copirelem, p. 376-389, 2017.
- Mounier Éric, Priolet Maryvonne, « Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire », Cnesco, Ifé-ENS Lyon, 2015. ➔ http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Manuels.pdf
- Mounier Éric, « Une analyse de l'enseignement de la numération. Vers de nouvelles pistes », 2010. ➔ https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00550721v1/document
- Pelay Nicolas, « Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique », Université Claude-Bernard - Lyon I, 2011. ➔ https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/
- Priolet Maryvonne, Mounier Éric, « Le manuel scolaire : une ressource au "statut paradoxal" – Rapport de l'enseignant au manuel scolaire de mathématiques à l'école élémentaire », Éducation et didactique, 12-1, p. 79-100, 2018. ➔ https://journals.openedition.org/educationdidactique/3041

- Sander Emmanuel, « La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux », A.N.A.E., 156, 611-619, 2018.
- Sander Emmanuel, « Quelles relations entre résolution de problèmes et opérations ? », Cnesco, 2015.
➔ https://www.cnesco.fr/fr/numeration/paroles-dexperts/resolution-de-problemes-et-operations/

Conception graphique et suivi éditorial
Délégation à la communication

Exécution graphique
Opixido

Impression
MENJS

Novembre 2020

ISBN 978-2-11-155902-8

IMPRIM'VERT®

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE