

Manipuler représenter abstraire

pour enseigner les mathématiques

Avant de commencer...

- 9h -12h ou 13h30 -16h30
- Feuille d'émargement
- Un temps didactique sur « Manipuler représenter abstraire » et les nouveaux programmes
- Un temps d'atelier par cycle

Aujourd'hui



- 9h – 12h
- Emargement virtuel
- À l'école
- Les enseignants de l'école de la PS au CM2
- Analyse du matériel de l'école
- Une situation problème à décliner de la PS au CM2

Le 5 février



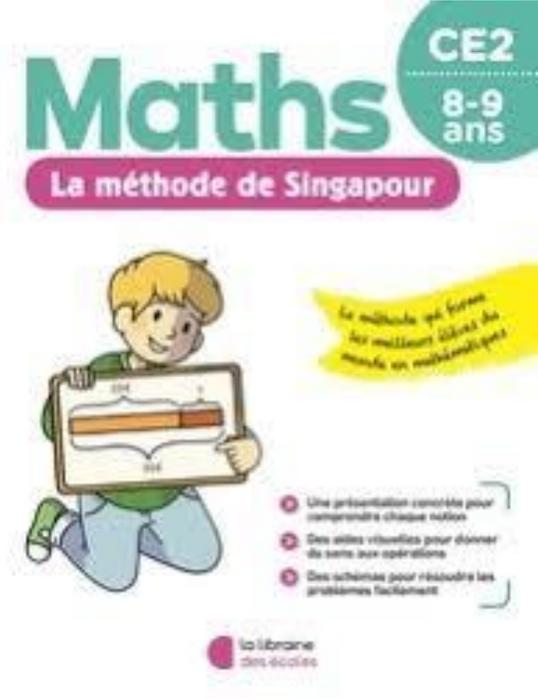
Parcours de l'élève  travail et réflexion d'équipe

- Place et sens de la manipulation : passive VS active
- Passage de la manipulation à la représentation
- Place centrale de la verbalisation
- Processus d'abstraction

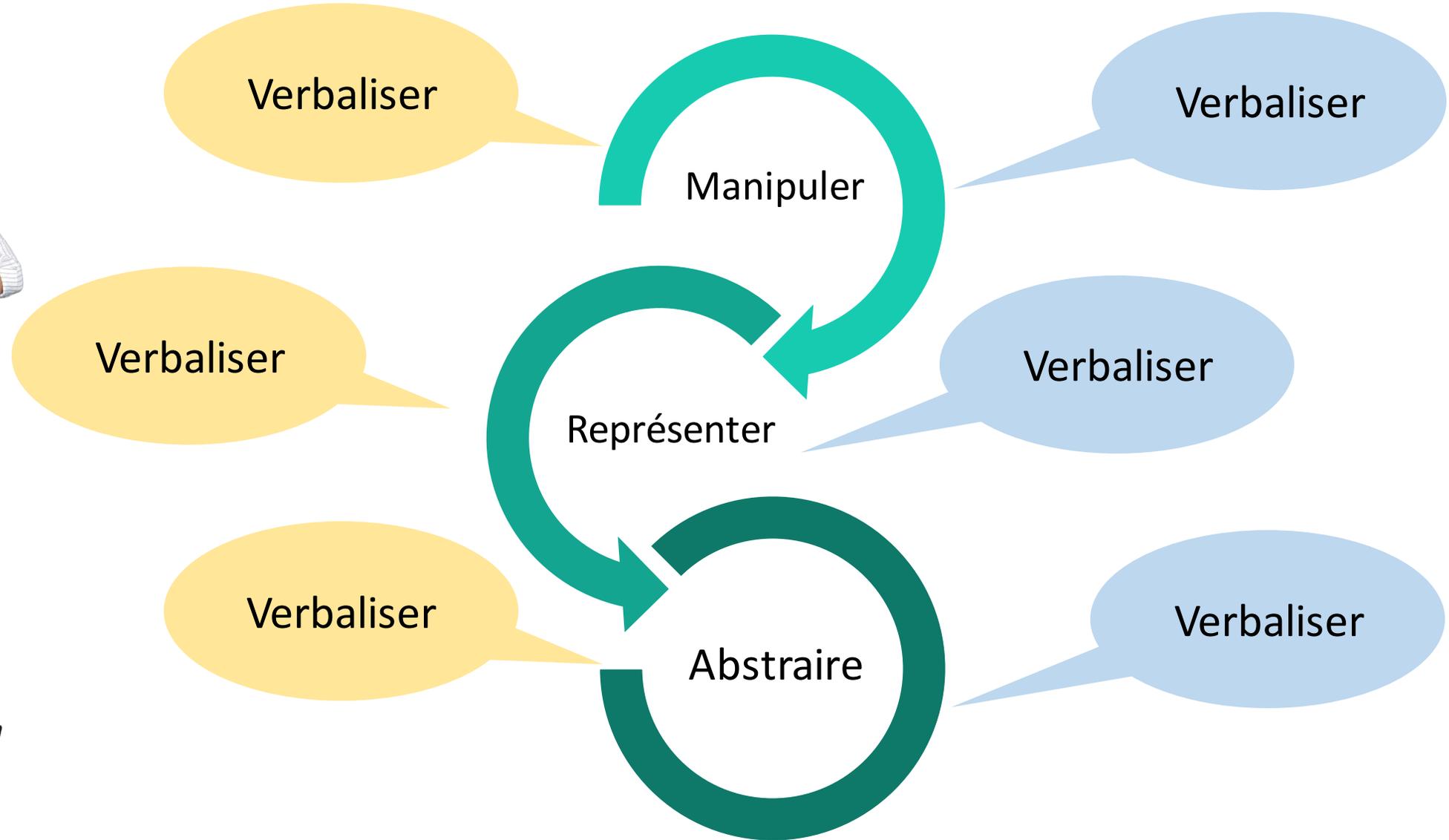
Eclaircissements...

~~La Méthode de Singapour~~

La démarche de Singapour.



Les étapes d'apprentissage en mathématiques



Jouons !

Un petit jeu ! *Le jeu des allumettes*

A deux, avec 20 allumettes.



A son tour, chaque joueur peut prendre une ou deux allumettes.

Le joueur qui prend la ou les dernières allumettes a gagné.

Qui a
gagné ?

Qui a pensé à
une stratégie
gagnante ?

Un petit jeu !
Le jeu des allumettes



A deux, avec 20 allumettes.

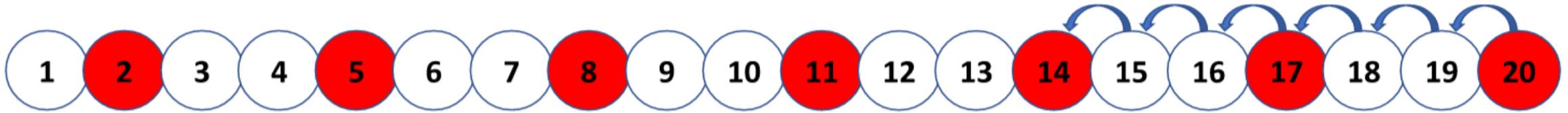
A son tour, chaque joueur peut prendre une ou deux allumettes.

Le joueur qui prend la ou les dernières allumettes a gagné.

Comment avez-vous
réussi à prendre le
20^{ème} objet ?

Vous recommencez à
jouer mais cherchez
la stratégie gagnante

Recherchons la stratégie gagnante



 Positions gagnantes car elles vous assurent de gagner et empêchent l'adversaire de gagner

Pour gagner face à un adversaire qui connaît également le jeu, il est donc nécessaire de commencer et de prendre les objets 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – 20

Analysons !

Au début :

- Découverte des règles
- On constate à la fin si on a gagné ou perdu

Ensuite ou après questionnement :

- On cherche à anticiper
- On cherche une stratégie gagnante

Manipulation passive

Les joueurs sont actifs... ils jouent, ils se souviennent des règles, ils mobilisent les règles mais...ils manipulent passivement puisqu'ils n'anticipent pas de stratégie gagnante.

Manipulation active

Les joueurs sont actifs et anticipent ce que leurs actions vont produire sur la suite du jeu.

Apports didactiques sur la manipulation

- On peut manipuler sans anticiper, sans être actif cognitivement au vu de l'objectif d'apprentissage.
 - Cette manipulation passive peut-être une étape intermédiaire avant l'anticipation de la recherche d'une stratégie plus élaborée.
- ➡ Distinguer la manipulation passive de la manipulation active dans la mesure où cela provoque ou non des apprentissages chez les élèves.

Passer de la :

manipulation
passive

à la



manipulation
active

Matériel :
Bloquer l'accès,
cacher...

Les élèves ont un accès direct au résultat.

Les élèves doivent anticiper :

- Mobiliser des représentations mentales,
- Utiliser leurs connaissances sur les nombres,
- Utiliser les représentations des nombres (chiffres, constellations, doigts...).

Passer de la ...

à la


manipulation
passive

manipulation
active

Peux-tu me
dire ce qui va
se passer si ... ?

« Que dois-tu
faire pour ... ? »

Comment
as-tu fait ?

« Comment
peux-tu en être
certain ? »

Verbalisation :
De l'enseignant et
de l'élève



Grâce au questionnement de l'enseignant

Il faut savoir doser !

- Si la phase de manipulation est trop courte  montée en abstraction trop rapide  inefficace pour beaucoup d'élèves.
- Ne pas laisser les élèves en difficulté en permanence sur un travail de manipulation  pas de montée en abstraction.

Et garder en tête :

Le but est de se passer à terme de la manipulation.

Un retour à la manipulation sera possible pour :

- vérifier,
- découvrir un nouveau modèle,
- explorer de nouvelles notions,
- résoudre un problème plus résistant.

Manipulation active ou manipulation passive ?

Cycle 1
PS



Manipulation active ou manipulation passive ?

Cycle 2
CP



Manipulation active ou manipulation passive ?

Cycle 3
CM



4 critères sur le matériel



4 principes généraux d'application des manipulatifs, identifiés par les sciences cognitives, sont susceptibles de mener à un meilleur apprentissage :

- Utiliser le manipulatif de **façon constante et sur une longue période**

Une exposition pour une période inférieure à 1 an : **pas de différence avec un enseignement sans manipulatif** ➡ **réflexion en équipe.**

Manipulatif : qui est utilisé ou destiné à être manipulé

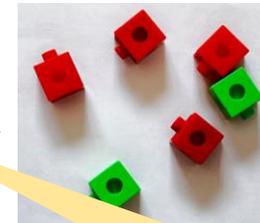
4 critères sur le matériel



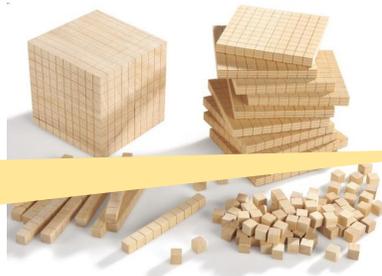
4 principes généraux d'application des manipulatifs, identifiés par les sciences cognitives, sont susceptibles de mener à un meilleur apprentissage :

- Utiliser le manipulatif de **façon constante et sur une longue période**
- Commencer par des **représentations transparentes** et avancer petit à petit **vers des représentations plus abstraites**

Verbaliser



Verbaliser



Verbaliser

4 critères sur le matériel



Exemple



Les enfants qui utilisaient des billets de banque réalistes pour résoudre des problèmes faisaient plus d'erreurs que ceux qui utilisaient des représentations plus basiques de l'argent avec des morceaux de papiers blancs où seuls les nombres étaient écrits dessus

(McNeil, Uttal, Jarvin & Sternberg, 2009)

Eviter les manipulatifs qui **ressemblent à des objets de la vie de tous les jours** ou ont des caractéristiques non pertinentes qui déconcentrent



4 critères sur le matériel

4 principes généraux d'application des manipulatifs, identifiés par les sciences cognitives, sont susceptibles de mener à un meilleur apprentissage :

- Utiliser le manipulatif de **façon constante et sur une longue période**
- Commencer par des **représentations transparentes** et avancer petit à petit **vers des représentations plus abstraites**
- Eviter les manipulatifs qui **ressemblent à des objets de la vie de tous les jours** ou ont des caractéristiques non pertinentes qui déconcentrent
- **Expliquer la relation** entre le manipulatif et le concept mathématique de façon **explicite**

Verbaliser

3 grands types de matériel pour enseigner le nombre

Matériel aux groupements apparents et modifiables :
cubes, boîtes à nombres, bâtonnets, jetons...



1 millier de
bâtonnets



1 centaine de
bâtonnets



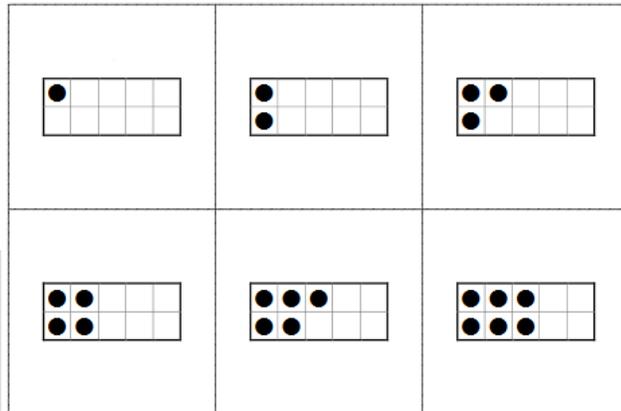
1 dizaine de
bâtonnets



1 bâtonnette

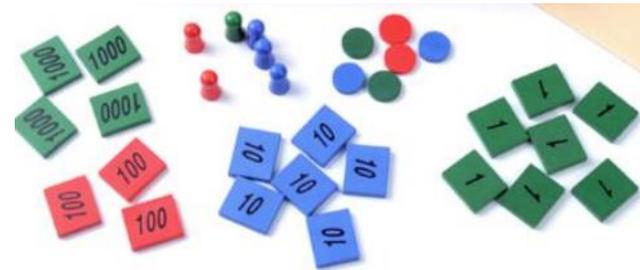
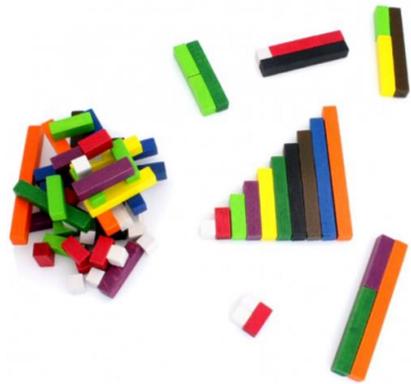
3 grands types de matériel pour enseigner le nombre

Matériel aux groupements apparents mais non modifiables: « je vois mais je ne peux pas défaire » : Numicon, carton Montessori, matériel base 10, cartes à points...

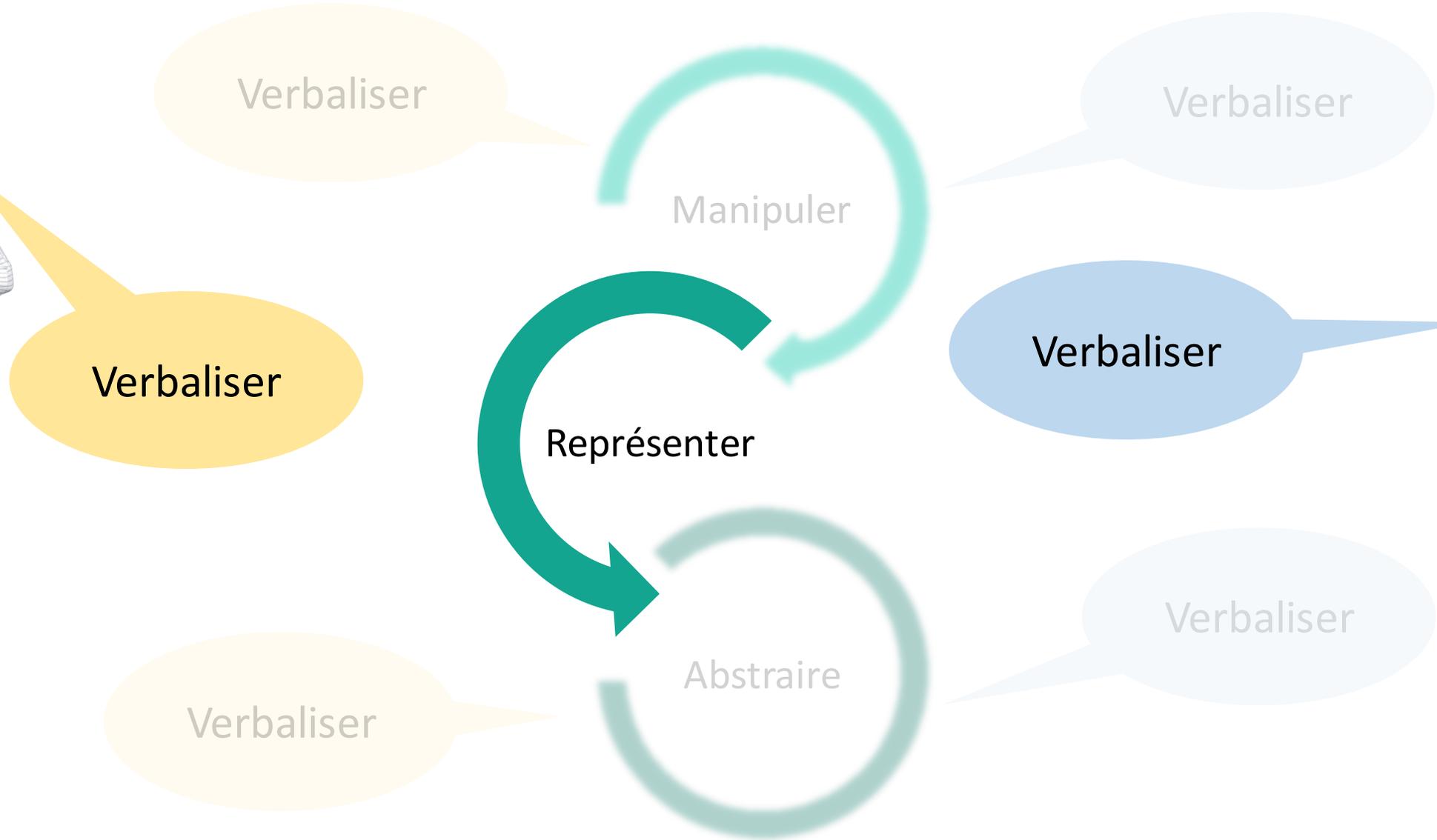


3 grands types de matériel pour enseigner le nombre

Matériel qui rend les groupements ni apparents ni modifiables : on ne voit pas les groupements et ils sont, par conséquent, non accessibles. Les abaques, la monnaie, les « timbres » constituent des exemples de matériel dit symbolique.

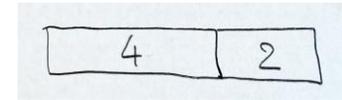
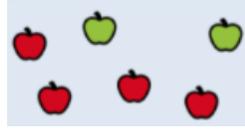


De la manipulation à la représentation



De la manipulation à la représentation

PROCESSUS D'ABSTRACTION



$$4 + 2 =$$

Manipuler

Verbaliser

Verbaliser

Représenter

Verbaliser

Verbaliser

Verbaliser

Abstraire

Verbaliser

Attention aux signes mathématiques !

- Ils ne sont pas à utiliser à la maternelle.
- La montée en abstraction serait trop rapide.

À l'école maternelle, dans le respect du rythme de chacun, les élèves mémorisent les décompositions des nombres jusqu'à dix, mais aussi, de manière réciproque, les résultats de calculs additifs dont la somme est inférieure ou égale à dix. Cette approche du calcul à l'école maternelle ne doit pas inciter les enseignants à devancer les apprentissages relevant du CP. **Le signe +, notamment, ne sera introduit qu'à l'école élémentaire, où l'addition trouvera véritablement le statut d'opération.**



Attention aux signes mathématiques ! Ils sont à enseigner au CP :

- Les signes + et – sont à introduire simultanément pour plus de sens.

l'apparition des symboles mathématiques « + » et « – » et des écritures type $4 + 5 = 9$ ou $7 - 4 = 3$, relève du CP. Les opérations mathématiques, addition et soustraction, sont introduites simultanément via la résolution de problèmes, les écritures symboliques « + » et « – » sont introduites dans un temps assez proche. Pour mieux comprendre le signe « + », il lui faut une alternative ; les deux signes « + » et « – » se mettront alors en valeur réciproquement.

Attention aux signes mathématiques ! Ils sont à enseigner au CP :

- Encore plus de vigilance pour le signe =

l'apparition du signe « = » relève lui aussi du CP. Souvent, il n'est compris que comme l'annonce du résultat d'un calcul : dans $5 + 3 = 8$, 8 est le résultat de $5 + 3$. Or, au sens mathématique, cette égalité exprime aussi que $5 + 3$ et 8 sont deux représentations différentes d'un même nombre. Le travail sur des égalités qui s'élargissent à des sommes de plusieurs termes, favorisera une bonne conception du signe « = ». La vigilance du professeur pourra porter sur :

- l'utilisation du signe « = » dans les deux sens : $5 + 3 = 8$ mais aussi $8 = 5 + 3$;
- l'utilisation de sommes de plus de deux termes, $4 + 2 + 2 = 8$, associées à des qua
- l'utilisation co du signe « = », comme dans cet exemple, « $15 + 8 = 15 + 5 = 20 + 3 = 23$ », qui est mathématiquement incorrect.

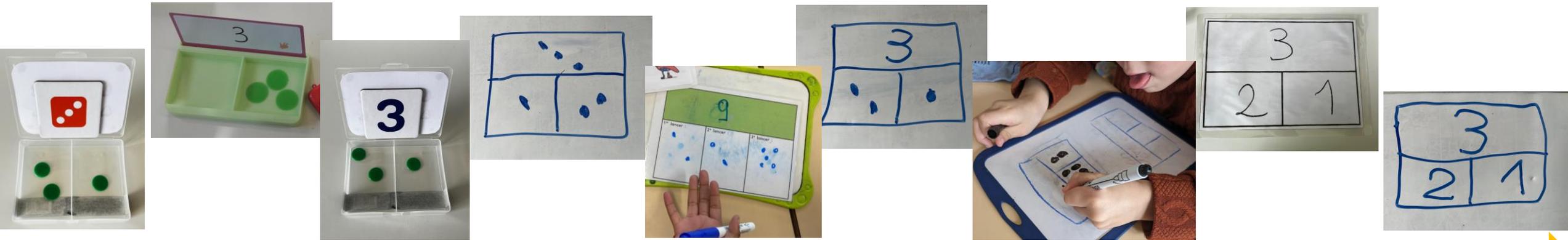
$$83 + 9 = 83 + 10 = 93 - 1 = 92$$



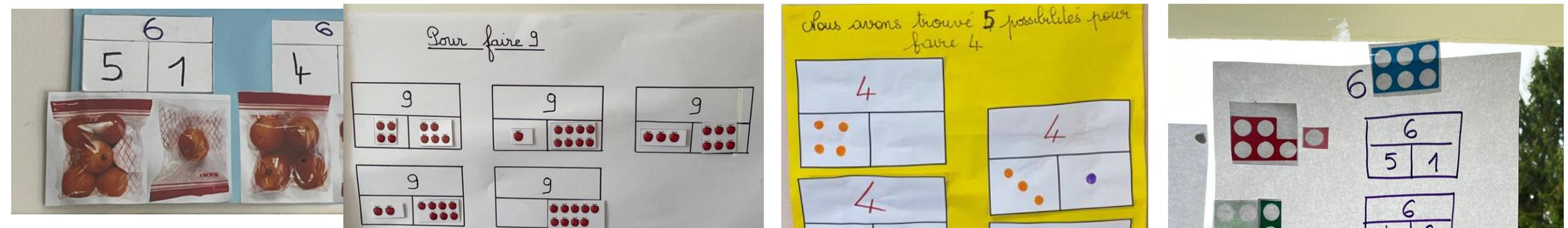
Processus d'abstraction

Attention aux signes mathématiques !

La « boîte de calcul » une alternative aux signes mathématiques.



PROCESSUS D'ABSTRACTION



De la boîte de calcul au schéma en barre

**Programmes
rentrée 2025**

L'élève sait s'appuyer, si cela lui est utile, sur un schéma en barre pour modéliser ensuite le problème.

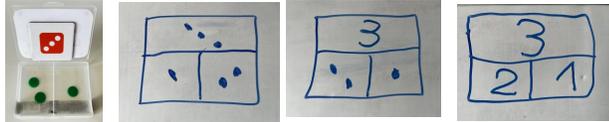
Une représentation :

- Manipulable
- Efficace et calculable
- Qui permet de modéliser tous les problèmes basiques
- Pour tous les nombres : entiers, fractions, décimaux
- Efficace pour les problèmes complexes et les problèmes de proportionnalité.

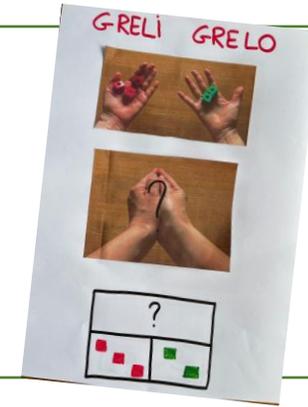
Parcours de l'élève et schéma en barre

Cycle 1

- Les élèves manipulent du matériel qui permettra au cycle 2 de manipuler le schéma en barre.
- On enseigne la boîte de calcul progressivement.

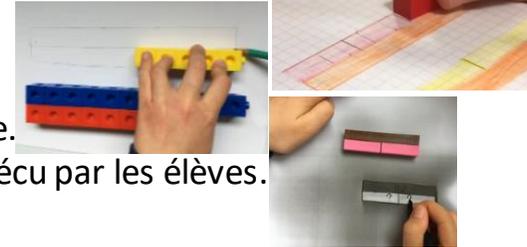


- On institutionnalise les problèmes de référence suivant la progression d'équipe avec la boîte de calcul.

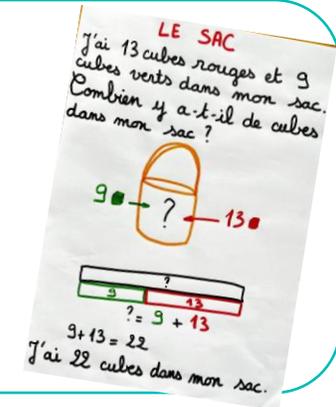


Cycle 2

- Les élèves manipulent pour construire le schéma en barre.



- On enseigne la représentation grâce au schéma en barre.
- Le passage de la manipulation au schéma en barre est vécu par les élèves.
- On institutionnalise les problèmes de référence suivant la progression d'équipe avec le schéma en barre.

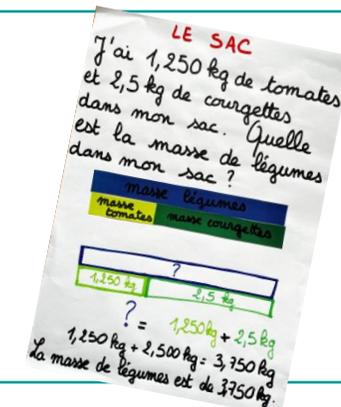


Cycle 3

- Les élèves manipulent pour construire le schéma en barre pour les nouveaux modèles, les problèmes complexes ou avec des fractions.

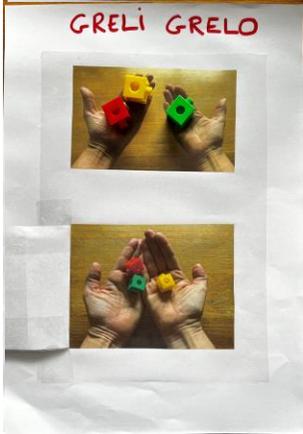


- On continue à institutionnaliser les problèmes de référence suivant la progression d'équipe.

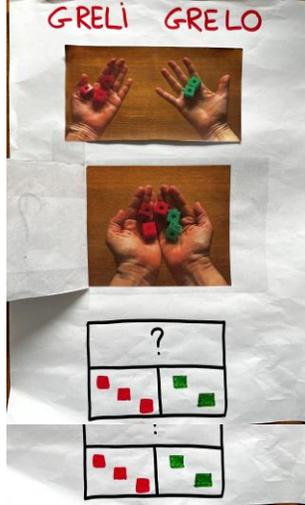


Parcours de l'élève et affichages

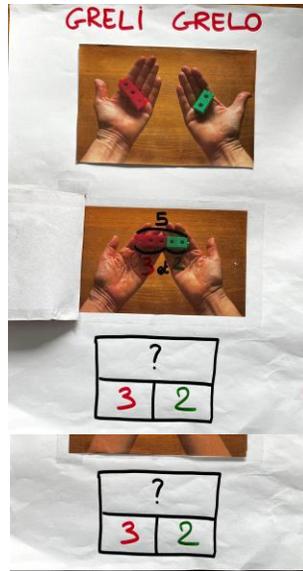
Pour une même catégorie de problème... Ici parties tout, recherche du tout



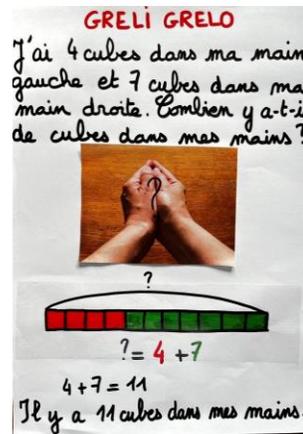
Janvier PS
-Véritables cubes
-Point d'interrogation



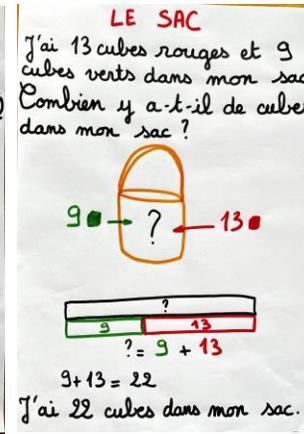
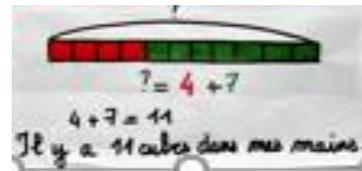
Janvier MS
Augmentation nombre
-Boite de calcul avec code analogique



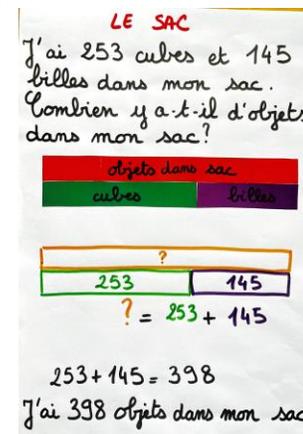
Janvier GS
-Emboiter cubes
-Boite de calcul avec chiffres



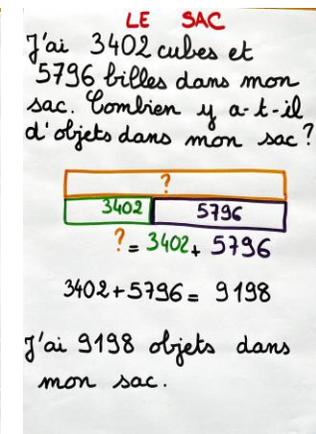
Période 2 CP
-Enoncé écrit
-Cubes fixés pour le schéma en barre
-Calcul
Période 3 CP
-Schéma en barre avec cubes



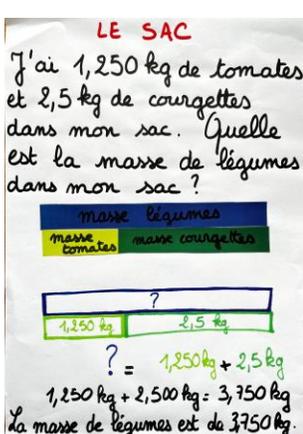
Période 5 CP
-Changement habillage
-Plus de photo mais dessin
-Schéma en barre avec double barre
-Augmentation nombre



Janvier CE1
Augmentation nombre
Cubes et billes
Représentation des réglettes en barre



Janvier CE2
- Augmentation nombre
-Schéma en barre



Janvier CM1
- Changement habillage
-Décimaux
- Représentation réglettes (décimaux)

Cycle 1

- Analyse de matériel mathématiques.
- L'évolution du matériel en résolution de problèmes.
- Les décompositions du nombre.



Avec
Olivier

Cycle 2

Les réglettes cuisenaire pour :

- Construire le nombre.
- Construire et mémoriser les faits numériques.
- Résoudre des problèmes.



Avec
Pascale

Cycle 3

Les réglettes cuisenaire pour :

- Enseigner les fractions.
- Résoudre des problèmes.



Avec
Christophe

PAUSE

